God
530
Mal/The
53339

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

00053339

BOMBAY BRANCH
OF THE
Royal Asiatic Society.

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 21 October, 2015

302 p.
26.5 cm

THÉORIE

DE

LA DOUBLE RÉFRACTION

DE LA LUMIÈRE

DANS LES

SUBSTANCES CRISTALLISÉES,

Mémoire couronné par l'Institut, dans la séance publique du 2 janvier 1810,

PAR E. L. MALUS,

LIEUTENANT-COLONEL AU CORPS IMPÉRIAL DU GÉNIE, MEMBRE DE L'INSTITUT D'ÉGYPTE.

53339

PARIS.

GARNERY, LIBRAIRE, RUE DE SEINE, HOTEL MIRABEAU.

BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT DE FRANCE.

M. DCCC. X.

1810

God
Fre
530
Mal/The
53339

La première Classe de l'Institut a proposé en 1808, pour sujet du prix de mathématiques qu'elle devoit adjuger en 1810, la question suivante :

Donner de la double réfraction que subit la lumière en traversant diverses substances cristallisées, une théorie mathématique vérifiée par l'expérience.

Le mémoire qui a été présenté au concours forme la seconde partie de cet ouvrage. La première partie, qui contient la théorie générale de l'optique, sert d'introduction à la théorie de la double réfraction.

53339

00053339

THÉORIE

DE LA

DOUBLE RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE

DANS LES SUBSTANCES CRISTALLISÉES.

Lois du mouvement de la lumière.

Les phénomènes de l'optique ont l'avantage particulier de pouvoir être mesurés avec une grande exactitude et d'être liés entre eux par un petit nombre de lois mathématiques. Ces lois sont indépendantes des hypothèses qu'on peut faire sur la nature de la lumière ; car, soit qu'on suppose avec Newton qu'elle consiste dans un fluide très-rare lancé de toutes parts par les corps lumineux, soit qu'on suppose avec Huyghens qu'elle est produite par les ondulations d'un fluide éthéré, la marche des rayons est toujours la même. L'hypothèse d'Huyghens est sujète à de grandes difficultés ; elle semble même incompatible avec les phènomènes chimiques que produit la lumière : celle de l'émission est plus vraisemblable et s'accorde mieux avec nos connoissances physiques. J'adopte donc dans cet ouvrage l'opi-

nion de Newton, non comme une vérité incontestable, mais comme un moyen de fixer les idées et d'interpréter les opérations de l'analyse. C'est une simple hypothèse qui n'a d'ailleurs aucune influence sur les résultats définitifs du calcul.

Les substances cristallisées réfractent et réfléchissent en général la lumière suivant la même loi que les milieux diaphanes ordinaires; mais la plupart d'entre elles lui impriment en outre une nouvelle modification qui multiplie singulièrement les phénomènes. Lorsqu'un rayon lumineux pénètre ces substances, il se divise en deux faisceaux dont l'un suit la loi de la réfraction ordinaire, et l'autre subit une réfraction extraordinaire soumise à une loi différente. De même, lorsqu'un rayon se réfléchit dans l'intérieur de ces corps, il se divise en deux faisceaux, dont l'un suit la loi de la réflexion ordinaire, et l'autre suit une loi analogue à celle de la réfraction extraordinaire.

Lorsque la lumière pénètre une substance diaphane ordinaire, le carré de sa vitesse est augmenté ou diminué d'une quantité constante; en sorte que dans un même milieu cette vitesse est constamment la même, quelle que soit la direction du rayon.

Lorsqu'elle est réfléchie dans un milieu diaphane ordinaire, la vitesse du rayon réfléchi est égale à celle du rayon incident.

Dans la réfraction extraordinaire, le carré de la vitesse de la lumière est égal au carré de celle qui est réfractée ordinairement, moins une quantité proportionnelle au

carré du sinus de l'angle compris entre l'axe du cristal et la direction du rayon réfracté extraordinaire.

Dans la réflexion extraordinaire, le carré de la vitesse de la lumière est égal au carré de celle qui est réfléchie ordinairement, moins une quantité proportionnelle au carré du sinus de l'angle compris entre l'axe du cristal et le rayon réfléchi extraordinaire.

L'expression de ces lois, jointe aux principes généraux de la mécanique, conduit, avec le seul secours de l'analyse, à la connoissance et au développement des nombreux phénomènes de l'optique.

Mon objet principal, dans cet ouvrage, est d'établir les lois de la réfraction et de la réflexion extraordinaires, de développer leurs conséquences et d'en déduire les principaux phénomènes que présentent les substances cristallisées. Cependant, comme ce sujet se rattache souvent aux phénomènes ordinaires de l'optique, je commencerai par analyser les lois de la réfraction et de la réflexion ordinaire.

Dans la première partie, je déduis d'une analyse uniforme et générale les diverses circonstances de la propagation de la lumière; je fais ensuite l'application de cette théorie à la catoptrique et à la dioptrique ordinaire; je détermine le lieu, la forme et la grandeur des images réfléchies ou réfractées, ainsi que l'intensité de la lumière qui émane de chacun de leurs points; et comme je n'introduis dans le calcul aucune restriction qui puisse diminuer sa généralité, l'application de mes formules aux cas particuliers donne la mesure exacte des phénomènes.

Dans la seconde partie j'établis, par une suite nombreuse d'expériences, les lois de la réfraction et de la réflexion extraordinaires; je rattache à ces lois des phénomènes qui sembloient leur échapper et faire une exception particulière; je montre l'accord constant des expériences avec les résultats de la théorie, et je développe les circonstances qui déterminent cette singulière modification de la lumière.

PREMIÈRE PARTIE.

Des questions d'optique qui dépendent de la géométrie.

CHAPITRE PREMIER.

Propriétés générales des faisceaux de rayons.

Les rayons qui émanent d'un point lumineux dans un milieu de densité uniforme, peuvent être regardés comme un système de lignes droites passant par ce point. Lorsque ces rayons rencontrent la surface d'un corps qui les réfléchit ou les réfracte, leur disposition mutuelle éprouve différentes modifications d'où naissent tous les phénomènes de l'optique.

Avant de passer à l'analyse de ces phénomènes j'exposerai quelques propriétés communes à tous les faisceaux de rayons réfléchis ou réfractés, et en général à tous les systèmes de lignes droites contiguës qui ne sont pas parallèles, ou de lignes courbes contiguës et de forme variable.

[1] Soit

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o} \qquad (A)$$

l'équation d'une ligne droite appartenant à un système de rayons disposés dans l'espace suivant une loi analytique quelconque; mno étant des fonctions arbitraires de $x'y'z'$. A chaque point de l'espace, c'est-à-dire à chaque valeur particulière de $x'y'z'$ correspondent de nouvelles lignes appartenant au même système.

Considérons d'abord les lignes qui appartiennent aux points contigus à celui dont les coordonnées sont $x'y'z'$. Parmi toutes ces lignes il n'y en a qu'une certaine série qui rencontre la ligne (A). Pour déterminer la direction des points auxquels elles appartiennent, il faudra exprimer en général que la ligne (A) et une ligne contiguë ont un point commun xyz, et par conséquent, *différentier l'équation* (A) *par rapport à* $x'y'z'$, en regardant xyz comme constans; ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m\,dx' + (x-x')\,dm}{m^2} \\ &= \frac{n\,dy' + (y-y')\,dn}{n^2} \\ &= \frac{o\,dz' + (z-z')\,do}{o^2} \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Les équations (A) (B) déterminent la relation qui doit exister entre les coordonnées xyz du point où la ligne (A) est rencontrée par la ligne contiguë et la direction $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ suivant laquelle se trouve le point au-

quel appartient cette seconde ligne. Elles se réduisent à l'équation unique

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=\frac{z-z'}{o}&=\frac{ndx'-mdy'}{mdn-ndm}\\&=\frac{mdz'-odx'}{odm-mdo}\\&=\frac{ody'-ndz'}{ndo-odn}\end{aligned}\right\}\quad(AB)$$

D'après cette équation les quantités $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ sont liées entre elles par la condition

$$\left.\begin{aligned}&dx'\,(ndo-odn)\\+\;&dy'\,(odm-mdo)\\+\;&dz'\,(mdn-ndm)\end{aligned}\right\}=\left.\begin{aligned}&m\,(do\,dy'-dn\,dz')\\+\;&n\,(dm\,dz'-do\,dx')\\+\;&o\,(dn\,dx'-dm\,dy')\end{aligned}\right\}=\left.\begin{aligned}&dm\,(ndz'-ody')\\+\;&dn\,(odx'-mdz')\\+\;&do\,(mdy'-ndx')\end{aligned}\right\}=0$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{dm}{dy'}\right)dy'+\left(\frac{dm}{dz'}\right)dz'\right](ndz'-ody')\\+\;&\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{dn}{dy'}\right)dy'+\left(\frac{do}{dz'}\right)dz'\right](odx'-mdz')\\+\;&\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{do}{dy'}\right)dy'+\left(\frac{do}{dz'}\right)dz'\right](mdy'-ndx')\end{aligned}\right\}=0.\quad(C)$$

équation qui peut être satisfaite par une infinité de valeurs de $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, et qui indique qu'il passe par le

point $x'y'z'$ une infinité de courbes dont les tangentes sont

$$\frac{x-x'}{dx'} = \frac{y-y'}{dy'} = \frac{z-z'}{dz'}. \qquad (D)$$

et qui jouissent toutes de cette propriété commune, que si on considère une d'elles en particulier, la suite des rayons (A) qui appartiennent à ses différens points, se rencontrent consécutivement.

Si, entre les équations (C), (D), on élimine dx', dy', dz', on obtiendra le lieu de toutes les tangentes (D) qui passent par le point $x'y'z'$. Le résultat de cette élimination est

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)(x-x')+\left(\frac{dm}{dy'}\right)(y-y')+\left(\frac{dm}{dz'}\right)(z-z')\right] \\
&\qquad [n(z-z')-o(y-y')] \\
+&\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)(x-x')+\left(\frac{dn}{dy'}\right)(y-y')+\left(\frac{dn}{dz'}\right)(z-z')\right] \\
&\qquad [o(x-x')-m(z-z')] \\
+&\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)(x-x')+\left(\frac{do}{dy'}\right)(y-y')+\left(\frac{do}{dz'}\right)(z-z')\right] \\
&\qquad [m(y-y')-n(x-x')]
\end{aligned}\right\} = 0. \qquad (E)$$

Cette équation appartient à une surface conique du second degré, qui a son centre au point $x'y'z'$, et dont les nappes indiquent la direction suivant laquelle on doit passer de ce point aux points contigus, pour que la ligne (A) soit rencontrée par les lignes consécutives. Le rayon (A) lui-même est une des arêtes de cette surface.

On peut déjà remarquer que tout plan passant par le centre de cette surface conique la coupera suivant deux lignes droites, en sorte qu'il y a en général à chaque point d'un plan deux directions suivant lesquelles on peut cheminer pour que les rayons (A) se rencontrent, quelles que soient les fonctions m, n, o.

[2] Soit actuellement une surface courbe

$$F(x'y'z') = 0 ; \quad p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0 \qquad (F)$$

à chaque point de cette surface appartient un des rayons (A). Or si, au moyen des équations (C) (F), on détermine $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, on aura, parce que l'équation (C) est du second degré, deux résultats de la forme

$$\frac{M}{dx'} = \frac{N}{dy'} = \frac{O}{dz'} \qquad (s)$$

$$\frac{M'}{dx'} = \frac{N'}{dy'} = \frac{O'}{dz'} \qquad (s')$$

en faisant

$$\alpha = o\left(\frac{dn}{dx'}\right) - n\left(\frac{do}{dx'}\right)$$

$$\beta = m\left(\frac{do}{dy'}\right) - o\left(\frac{dm}{dy'}\right)$$

$$\gamma = n\left(\frac{dm}{dz'}\right) - m\left(\frac{dn}{dz'}\right)$$

$$\delta = m\left(\frac{do}{dx'}\right) - o\left(\frac{dm}{dx'}\right) + o\left(\frac{dn}{dy'}\right) - n\left(\frac{do}{dy'}\right)$$

$$\varepsilon = n\left(\frac{dm}{dx'}\right) - m\left(\frac{dn}{dx'}\right) + o\left(\frac{dn}{dz'}\right) - n\left(\frac{do}{dz'}\right)$$

$$\zeta = n\left(\frac{dm}{dy'}\right) - m\left(\frac{dn}{dy'}\right) + m\left(\frac{do}{dz'}\right) - o\left(\frac{dm}{dz'}\right)$$

$$L = \left\{ \begin{array}{l} (\delta r + \varepsilon q + \zeta p)^2 + 4\,pq\,(\gamma\delta - \varepsilon\zeta) \\ + 4\,pr\,(\beta\varepsilon - \delta\zeta) + 4\,qr\,(\alpha\zeta - \delta\varepsilon) \\ - 4\,\beta\gamma p^2 - 4\,\alpha\gamma q^2 - 4\,\alpha\beta r^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$M = \zeta pq + \delta qr - \varepsilon q^2 - 2\,\beta pr + qL$$
$$M' = \zeta pq + \delta qr - \varepsilon q^2 - 2\,\beta pr - qL$$
$$N = \varepsilon pq + \delta pr - \zeta p^2 - 2\,\alpha qr - pL$$
$$N' = \varepsilon pq + \delta pr - \zeta p^2 - 2\,\alpha qr + pL$$

$$O = O' = -\frac{p}{r}M - \frac{q}{r}N = -\frac{p}{r}M' - \frac{q}{r}N'$$
$$= 2\,(\alpha q^2 + \beta p^2 - \delta pq)$$

Substituant les valeurs précédentes de dx', dy', dz' dans l'équation (D), on aura

$$\frac{x - x'}{M} = \frac{y - y'}{N} = \frac{z - z'}{O} \qquad \text{(D)}$$

$$\frac{x - x'}{M'} = \frac{y - y'}{N'} = \frac{z - z'}{O'} \qquad \text{(D')}$$

équations qui appartiennent à deux lignes tangentes à la surface (F) et dont la direction indique sur cette surface dans quel sens on doit passer du point $x'y'z'$ aux points contigus, pour que les rayons (A) se rencontrent. On auroit également obtenu les équations (D) (D') en combinant l'équation du plan tangent à la surface (F) avec celle de la surface conique (E).

Les équations (s) (s') ayant lieu pour chacun des points de la surface (F), leurs intégrales expriment deux systèmes de courbes tracées sur cette surface, et dont chacune jouit en particulier de cette propriété, que

tous les rayons (A) qui lui appartiennent se rencontrent consécutivement. En effet, la courbe (s) ou (s′) satisfaisant en chacun de ses points à l'équation (C), se trouve toujours dans la direction des points auxquels appartiennent les rayons consécutifs qui se rencontrent.

La suite des lignes (A) qui passent par la courbe (s) et se rencontrent consécutivement, forme une surface développable (S) dont l'arête de rebroussement (σ) est le lieu des points de rencontre. En second lieu, comme la courbe (s) est coupée en chacun de ses points par une des courbes (s′), il s'ensuit que la surface développable (S) est coupée, suivant chacune de ses génératrices, par une surface développable (S′) formée par les rayons qui appartiennent à une des courbes (s′).

La suite des arêtes de rebroussement (σ) de la première série de surfaces développables (S), forme une surface courbe (Σ) *à laquelle chacun des rayons* (A) *est tangent.* La suite des arêtes de rebroussement (σ') de la seconde série de surfaces développables (S′), forme une seconde surface (Σ') à laquelle tous les rayons (A) sont encore tangens.

Ainsi toutes les fois qu'on considère un système de lignes droites émanant de tous les points d'une surface courbe, suivant une loi analytique quelconque, ce système de lignes peut être regardé comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables; et puisque la suite des arêtes de rebroussement de ces deux systèmes de surfaces comprend l'intersection de toutes leurs génératrices, on en conclut que *le lieu des*

points de rencontre des lignes proposées est compris sur deux surfaces courbes.

[3] Concevons le plan qui passe par la ligne (A) et la tangente (D), son équation sera

$$\left.\begin{aligned}&(nO - oN).(x - x')\\ +\ &(oM - mO).(y - y')\\ +\ &(mN - nM).(z - z')\end{aligned}\right\} = 0 \qquad (AD)$$

De même, le plan qui passe par la ligne (A) et par la tangente (D') aura pour équation

$$\left.\begin{aligned}&(nO' - oN').(x - x')\\ +\ &(oM' - mO').(y - y')\\ +\ &(mN' - nM').(z - z')\end{aligned}\right\} = 0 \qquad (AD')$$

Ces deux plans contiennent évidemment les lignes contiguës à la ligne (A) par lesquelles elle est rencontrée.

Pour déterminer les coordonnées x, y, z du point de rencontre de celle qui se trouve dans le plan (AD), il faudra substituer dans l'équation (AB) les valeurs $\frac{M}{O}$, $\frac{N}{O}$ de $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, tirées des équations (s); ce qui donne, en faisant

$$A = \frac{nM - mN}{m\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)M + \left(\frac{dn}{dy'}\right)N + \left(\frac{dn}{dz'}\right)O\right] - n\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N + \left(\frac{dm}{dz'}\right)O\right]}$$

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{o} = A \qquad (G)$$

La distance du point $x'y'z'$ au point xyz que nous nommerons R, est par conséquent

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= (m^2 + n^2 + o^2)\,\Lambda^2$$

On obtiendra un résultat semblable pour la ligne qui est dans le plan (AD'), en substituant dans Λ $M'N'O'$ à MNO, et on aura, en nommant Λ' la valeur qui en résulte,

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{o} = \Lambda' \qquad (G')$$

La distance R' du point $x'y'z'$ au second point de rencontre sera

$$R'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= (m^2 + n^2 + o^2)\,\Lambda'^2$$

On auroit pu obtenir collectivement les doubles valeurs (G) (G') de $x - x', y - y', z - z'$ en éliminant $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ entre les équations (B) (F), ce qui eût produit une équation du second degré qui, combinée avec l'équation (A), auroit déterminé les valeurs proposées.

Soient

$$V = 0; \quad W = 0 \qquad (ss)$$
$$V' = 0; \quad W' = 0 \qquad (s's')$$

les intégrales des équations (s) (s') qui doivent être complétées par la condition que ces courbes passent par un point particulier de la surface (F).

L'équation d'une surface développable (S) sera le résultat de l'élimination de $x'y'z'$ entre les équations (A) (ss).

Les équations de son arête de rebroussement (σ) seront le résultat de l'élimination des mêmes quantités entre les équations (G) (ss).

Enfin l'équation de la surface (Σ), qui est le lieu de toutes les arêtes de rebroussement (σ) de la série de surfaces (S), sera le résultat de l'élimination de $x'y'z'$ entre l'équation (G) et l'équation $F.(x'y'z') = 0$.

Tout ce qui a rapport à la série de surfaces développables (S') s'obtient par des considérations semblables aux précédentes, en substituant les courbes (s's') aux courbes (ss).

[4] Les deux surfaces développables (S) (S') qui se rencontrent suivant les lignes (A) se coupent pour chacune de ces lignes sous un angle particulier dont nous allons déterminer l'expression. Nous observerons que le plan (AD) qui passe par la ligne (A) et par la tangente (D), contenant deux génératrices consécutives de la surface développable (S), est par conséquent tangent à cette surface, et que par la même raison le plan (AD') est tangent à la surface (S'), en sorte que l'angle compris entre ces deux plans est celui sous lequel les surfaces proposées se rencontrent. Or, si on nomme τ l'angle compris entre les deux plans (AD), (AD'), on a

$$\cos\tau = \frac{(m^2+n^2+o^2).(MM'+NN'+OO') - (mM+nN+oO).(mM'+nN'+oO')}{[(m^2+n^2+o^2).(M^2+N^2+O^2) - (mM+nN+oO)]^{\frac{1}{2}}.[(m^2+n^2+o^2).(M'^2+N'^2+O'^2) - (mM'+nN'+oO')]^{\frac{1}{2}}}$$

expression qui sera toujours fonction de $x'\,y'\,z'$, à moins qu'on n'ait

$$(m^2+n^2+o^2).\,(MM'+NN'+OO')$$
$$-(mM+nN+oO).\,(mM'+nN'+oO')=0$$

indépendamment des valeurs de $x'\,y'\,z'$. Dans ce cas particulier on a $\cos r=0$, et les surfaces développables (S) (S') se coupent toutes à angle droit. En substituant dans cette équation pour $MNO\;M'N'O$ leurs valeurs, elle devient

$$\left.\begin{array}{l}
\left[o\left(\frac{dn}{dx'}\right)-n\left(\frac{do}{dx'}\right)\right]\\
\left[m^2.\,(q^2+r^2)+(nq+or)^2\right]\\
-\left[m\left(\frac{do}{dx'}\right)-o\left(\frac{dm}{dx'}\right)+o\left(\frac{dn}{dy'}\right)-n\left(\frac{do}{dy'}\right)\right]\\
\left[(m^2+n^2)\,pq+or\,(mq+np)-mnr^2\right]\\
+\left[m\left(\frac{do}{dy'}\right)-o\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right]\\
\left[n^2\,(p^2+r^2)+(mp+or)^2\right]\\
-\left[n\left(\frac{dm}{dx'}\right)-m\left(\frac{dn}{dx'}\right)+o\left(\frac{dn}{dz'}\right)-n\left(\frac{do}{dz'}\right)\right]\\
\left[(m^2+o^2)\,pr+nq\,(mr+op)-moq^2\right]\\
+\left[n\left(\frac{dm}{dz'}\right)-m\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right]\\
\left[o^2\,(p^2+q^2)+(mp+nq)^2\right]\\
-\left[n\left(\frac{dm}{dy'}\right)-m\left(\frac{dn}{dy'}\right)+m\left(\frac{do}{dz'}\right)-o\left(\frac{dm}{dz'}\right)\right]\\
\left[(n^2+o^2)\,qr+mp\,(nr+oq)-nop^2\right]
\end{array}\right\}=0.\ (H)$$

en sorte que toutes les fois que les fonctions mno satisfont à cette équation de condition, on peut regarder

les rayons (A) comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent à angle droit

Considérons un moment les lignes (A) comme les normales d'une surface courbe $F.\ (x'\ y'\ z') = 0$, $p\,dx'\ q\,dy'\ r\,dz' = 0$, on aura $m = p$, $n = q$, $r = 0$. Substituant ces valeurs dans le numérateur de l'expression de *cos* γ ou dans le premier membre de l'équation (H), il se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l} r\left(\frac{dq}{dx'}\right) - q\left(\frac{dr}{dx'}\right) + p\left(\frac{dr}{dy'}\right) \\ -\ r\left(\frac{dp}{dy'}\right) + q\left(\frac{dp}{dz'}\right) - p\left(\frac{dq}{dz'}\right) \end{array}\right\} \cdot (p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$$

quantité qui est toujours nulle, puisque $p\,dx' + p\,dy' + p\,dz' = 0$ est la différentielle de la fonction $F.\ (x'\ y'\ z') = 0$; en sorte que les normales d'une surface courbe sont toujours le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent à angle droit. On en conclue que réciproquement toutes les fois que, dans un système de rayons (A), les fonctions $m\,n\,o$ satisfont à l'équation de condition (H), il existe une série de surfaces normales à tous ces rayons.

Si les quantités $m\,n\,o$ sont des fonctions données qui ne satisfont pas généralement à l'équation (H), on peut se proposer de déterminer les surfaces $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$ par la condition que les rayons (A) soient le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables rectangulaires; alors l'équation (H) est l'équation aux différences partielles des surfaces cherchées.

[5] Les phénomènes de l'optique dépendent principalement du lieu des points de rencontre des rayons consécutifs, c'est-à dire de la forme et de la position des surfaces (Σ) (Σ'). Ces surfaces peuvent avoir différentes nappes situées, les unes d'un côté de la surface (F), les autres du côté opposé. L'angle compris entre les rayons (A) qui appartiennent à une même courbe (ss), après avoir été positif, peut devenir négatif, et réciproquement; et il est évident qu'avant de changer de signe cet angle aura été nul, et le point de rencontre de deux rayons consécutifs éloigné à l'infini. Or, si dans l'équation (AB) on fait xyz infinis, on a

$$\frac{dm}{m} = \frac{dn}{n} = \frac{do}{o} \qquad (I)$$

Cette équation étant du premier degré en dx' dy' dz', indique qu'il n'y a en un point x' y' z' qu'une seule direction suivant laquelle on puisse cheminer pour que les deux lignes (A) consécutives soient parallèles; et si on intègre cette équation elle devient

$$\frac{m}{\mathrm{m}} = \frac{n}{\mathrm{n}} = \frac{o}{\mathrm{o}} \qquad S(I)$$

m n o exprimant en xyz les mêmes fonctions que mno en $x'y'z'$. La courbe à double courbure S(I) jouit de cette propriété, que toutes les droites du système proposé, appartenant à chacun de ses points, sont parallèles à la ligne (A); d'où on conclut que *le système général des lignes* (A) *peut être regardé comme le lieu d'un système de surfaces cylindriques.*

Si on substitue dans l'équation (I) les valeurs $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ tirées de l'équation (s), elle devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{dm}{dx}\right)M+\left(\frac{dm}{dy}\right)N+\left(\frac{dm}{dz}\right)O}{m} \\ =&\frac{\left(\frac{dn}{dx}\right)M+\left(\frac{dn}{dy}\right)N+\left(\frac{dn}{dz}\right)O}{n} \\ =&\frac{\left(\frac{do}{dx}\right)M+\left(\frac{do}{dy}\right)N+\left(\frac{do}{dz}\right)O}{o} \end{aligned}\right\} \quad (s)$$

et indique le lieu des points particuliers des courbes (ss), pour lesquels deux rayons consécutifs cessent de se rencontrer; elles expriment par conséquent une courbe qui coupe toute la série (ss).

De même, si on substitue dans l'équation (I), pour $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ leurs valeurs tirées des équations (s'), on aura

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{dm}{dx}\right)M'+\left(\frac{dm}{dy}\right)N'+\left(\frac{dm}{dz}\right)O'}{m} \\ =&\frac{\left(\frac{dn}{dx}\right)M'+\left(\frac{dn}{dy}\right)N'+\left(\frac{dn}{dz}\right)O'}{n} \\ =&\frac{\left(\frac{do}{dx}\right)M'+\left(\frac{do}{dy}\right)N'+\left(\frac{do}{dz}\right)O'}{o} \end{aligned}\right\} \quad (s')$$

équation d'une courbe particulière qui rencontre toutes les courbes (s's') suivant les points où les rayons (A) cessent de se couper dans le même sens.

Les équations $_{,}(s)$, $_{,}(s')$ sont des solutions particulières des équations différentielles (s), (s').

Si, entre les équations $_{,}(s)$ ou $_{,}(s')$ et l'équation $pM + qN + rO = o$ ou $pM' + qN' + rO' = o$, on élimine MNO ou $M'N'O'$, on obtient l'équation de condition

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{p\left[m\left(\frac{do}{dz}\right)-o\left(\frac{dm}{dz}\right)\right]-r\left[m\left(\frac{do}{dx}\right)-o\left(\frac{dm}{dx}\right)\right]\right\}\\
&\times\left\{q\left[n\left(\frac{do}{dz}\right)-o\left(\frac{dn}{dz}\right)\right]-r\left[n\left(\frac{do}{dy}\right)=o\left(\frac{dn}{dy}\right)\right]\right\}\\
&-\left\{p\left[n\left(\frac{do}{dz}\right)-o\left(\frac{dn}{dz}\right)\right]-r\left[n\left(\frac{do}{dx}\right)-o\left(\frac{dn}{dx}\right)\right]\right\}\\
&\times\left\{q\left[m\left(\frac{do}{dz}\right)-o\left(\frac{dm}{dz}\right)\right]-r\left[m\left(\frac{do}{dy}\right)-o\left(\frac{dm}{dy}\right)\right]\right\}
\end{aligned}\right\}=o$$

qui exprime la condition à laquelle doivent satisfaire mno pour qu'en chaque point de la surface $pdx' + qdy' + rdz' = o$ il existe deux rayons consécutifs parallèles, c'est-à-dire pour qu'un des deux systèmes de surfaces développables (S) (S') soit un système de surfaces cylindriques.

Si mno sont donnés, et pqr inconnus, la condition précédente peut être regardée comme l'équation aux différences partielles des surfaces $pdy' + qdy' + rdz' = o$ qui satisfont à la condition proposée.

Chacune des lignes (A) qui appartient à la courbe $_{,}(s)$ est asymptote à deux branches d'une arête de rebroussement (σ), situées de côtés opposés; et par conséquent, la suite des lignes (A) qui appartiennent à la courbe $_{,}(s)$, forme une surface $_{,}(\Sigma)$ asymptote à deux nappes de la

surface (Σ) situées de côtés opposés. Pareillement la suite des lignes (A) qui appartiennent à la courbe $_{,}(s')$, forment une surface $_{,}(\Sigma')$ asymptote à deux nappes de la surface (Σ').

La ligne d'intersection des deux surfaces $_{,}(\Sigma)$ $_{,}(\Sigma')$, c'est-à-dire le rayon (A) qui correspond au point de rencontre des deux courbes $_{,}(s)$ (s'), est asymptote à deux branches d'une arête de rebroussement (σ) et à deux branches d'une arête de rebroussement (σ').

Outre les deux courbes $_{,}(s)$ $_{,}(s')$, les équations (s) (s') ont encore une autre solution particulière qui correspond aux points où les courbes (ss) $(s's')$ se confondent, c'est-à-dire au cas où $M = M'$, $N = N'$, $L = 0$, et par conséquent

$$\begin{aligned}(\delta r + \varepsilon q + \zeta p)^2 &+ 4\,pq\,(\gamma\delta - \varepsilon\zeta)\\ &+ 4\,pr\,(\beta\varepsilon - \delta\zeta)\\ &+ 4\,qr\,(\alpha\zeta - \delta\varepsilon)\\ &- 4\,\beta\gamma p^2 - 4\,\alpha\gamma p^2\\ &- 4\,\alpha\beta r^2 = 0\end{aligned}$$

Si mno sont indéterminés et pqr connus, cette équation indique la condition à laquelle doivent satisfaire mno, pour qu'en chaque point de la surface $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$ les courbes (ss) $(s's')$ se confondent.

Si mno sont donnés et pqr indéterminés, cette équation aux différences partielles est celle des surfaces $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$ pour lesquelles les courbes (ss) $(s's')$ se confondent dans tous leurs points.

Enfin, si mno et pqr sont déterminés, cette équation combinée avec $F.(x'y'z') = 0$, détermine sur cette surface la courbe particulière suivant laquelle les courbes (ss) (s's') se touchent.

[6] Nous n'avons considéré parmi les droites qui rencontrent la ligne (A)

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{o} \qquad (A)$$

et qui appartiennent au même système général, que celles qui lui sont contiguës; mais cette ligne est rencontrée en chacun de ses points XYZ par une suite de droites du même système formant une surface conique qui a pour direction la courbe à double courbure

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{o} \qquad (\alpha)$$

m n o représentant en xyz les mêmes fonctions que mno en $x'y'z'$, et les quantités XYZ étant liées entre elles par l'équation de condition

$$\frac{X - x'}{m} = \frac{Y - y'}{n} = \frac{Z - z'}{o} \qquad (\beta)$$

Ainsi *le système général des lignes* (A) *peut être regardé comme le lien d'un système de surfaces coniques.*

Enfin la surface qui est le lien de toutes les courbes (α) a pour équation

$$\left.\begin{aligned} &m\,[n\,(z - z') - o\,(y - y')] \\ +\ &n\,[o\,(x - x') - m\,(z - z')] \\ +\ &o\,[m\,(y - y') - n\,(x - x')] \end{aligned}\right\} = 0. \qquad (\alpha\beta)$$

Cette surface passe par le point $x'y'z'$, et jouit de cette propriété, que les droites du système proposé qui appartiennent à chacun de ses points, rencontrent toutes la ligne (A). Son équation différentielle est

$$\left.\begin{array}{l} dm\,[n\,(z-z')-o\,(y-y')] \\ +\,dn\,[o\,(x-x')-m\,(z-z')] \\ +\,do\,[m\,(y-y')-n\,(x-x')] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\,m\,(ndz-ody) \\ -\,n\,(odx-mdz) \\ -\,o\,(mdy-ndx) \end{array}\right\} \quad d(\alpha\beta)$$

et on peut concevoir en chacun de ses points le plan tangent qui lui est particulier. Mais si on ne cousidère que les points de cette surface contigus à celui dont les coordonnées sont $x'y'z'$; comme on a alors $m = m$, $n = n$, $o = o$, le second membre de l'équation $d(\alpha\beta)$ devient identique; et à cause de $\frac{x-x'}{dx'} = \frac{y-y'}{dy'} = \frac{z-z'}{dz'}$ cette équation se réduit à

$$\left.\begin{array}{l} dm\,(ndz'-ody') \\ +\,dn\,(odx'-mdy') \\ +\,do\,(mdy'-ndy') \end{array}\right\} = o \qquad (C)$$

qui est la même que l'équation (C) du paragraphe [1]. La surface $(\alpha\beta)$ n'a plus en ce point un plan tangent, mais une surface conique tangente (E) qui est du second degré; ce qui fait que l'équation $d(\alpha\beta)$ cesse de satisfaire en ce point aux conditions d'intégrabilité.

[7] l'équation

$$\left.\begin{array}{l} dx'\,(ndo-odn) \\ +\,dy'\,(odm-mod) \\ +\,dz'\,(mdn-ndm) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\,m\,(dody'-dndz') \\ +\,n\,(dmdz'-dodx') \\ +\,o\,(dndx'-dmdy') \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} dm\,(ndz'-ody') \\ +\,dn\,(odx'-mdz') \\ +\,do\,(mdy'-ndx') \end{array}\right\} = o. \quad (C)$$

a pour solutions particulières

$$\frac{dm}{m} = \frac{dn}{n} = \frac{do}{o} \qquad (I)$$

$$\frac{dm}{dx'} = \frac{dn}{dy'} = \frac{do}{dz'} \qquad (K)$$

$$\frac{dx'}{m} = \frac{dy'}{n} = \frac{dz'}{o} \qquad (L)$$

La première (I), comme on l'a vu [5], indique la direction suivant laquelle on doit passer du point $x'y'z'$ au point contigu, pour que les deux rayons (A) consécutifs soient parallèles. La seconde (K) indique celles des directions qui sont perpendiculaires aux plans $(x - x')\,dm + (y - y')\,dn + (z - z')\,do = 0$.

Enfin la troisième (L) indique la direction $\frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}$ qui se trouve dans le sens même de la ligne (A). Si, partant du point $x'y'z'$, on considère la suite des lignes consécutives qui se rencontrent dans ce sens, on aura une série de lignes (A) qui seront les tangentes de la courbe à double courbure représentée par l'équation (L), et formeront une surface développable. *Donc le système général des lignes* (A), considéré sous ce point de vue, *pourra toujours être regardé comme le lieu d'un système général de surfaces développables.*

L'équation (L) dans laquelle $m\,n\,o$ représentent chacune une fonction de $x'y'z'$, exprime dans sa plus grande généralité un système de courbes à double courbure; elle se déduit généralement de deux équations de la forme

$$F.\left(x'y'z'.\frac{dx'}{dz'}.\frac{dy'}{dz'}\right)=0\,;\ f.\left(x'y'z'.\frac{dx'}{dz'}.\frac{dy'}{dz'}\right)=0.\ (L')$$

qui expriment chacune une propriété particulière au système de courbes proposé F et f désignant des fonctions qui peuvent satisfaire ou ne pas satisfaire aux conditions d'intégrabilité.

Si on considère à part une des équations (L'), par exemple, l'équation

$$F.\left(x'y'z'.\frac{dx'}{dz'}.\frac{dy'}{dz'}\right)=0$$

Elle équivaut, pour sa généralité, à la première projection d'une courbe dont la seconde seroit arbitraire. Elle appartient à un nombre indéfini de systèmes de courbes *continues ou discontinues*, et qui participent toutes *néanmoins d'une propriété particulière.*

Par chaque point $x'y'z'$ passe un nombre indéfini ou une série de ces courbes. Leurs directions au point $x'y'z'$, ou la série de leurs tangences en ce point, forme une surface conique du même degré que l'équation

$$F.\left(x'y'z'.\frac{dx'}{dz'}.\frac{dy'}{dz'}\right)=0$$

En effet si, dans cette équation, on substitue $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ à dx' dy' dz', on aura une équation

$$F.\left(x'y'z'.\frac{x-x'}{z-z'}.\frac{y-y'}{z-z'}\right)=0 \qquad (L'')$$

qui appartiendra à une surface conique et sera du même degré que l'équation proposée (L'). Si cette équation est du premier degré, la surface (L') se réduira à un plan. Enfin si cette équation satisfait aux conditions d'intégrabilité, la série des courbes continues ou discontinues qui jouissent de la propriété

$$F.\left(x'y'z'.\ \frac{dx'}{dz'}.\ \frac{dy'}{dz'}\right) = 0$$

formera une surface courbe à laquelle le plan proposé sera tangent. Mais ceci n'est qu'un cas particulier, et nous regarderons en général l'équation

$$F.\left(x'y'z'.\ \frac{dx'}{dz'}.\ \frac{dy'}{dz'}\right) = 0$$

comme ne satisfaisant pas aux conditions d'intégrabilité, et par conséquent la série de courbes qui passent par un point donné de l'espace, comme ne formant pas par leur ensemble une surface courbe.

Dès qu'on considère à la fois les deux équations (L'), on a en chaque point $x'y'z'$ de l'espace deux surfaces coniques

$$\left.\begin{aligned} F.\left(x'y'z'.\ \frac{x-x'}{z-z'}.\ \frac{y-y'}{z-z'}\right) \\ f.\left(x'y'z'.\ \frac{x-x'}{z-z'}.\ \frac{y-y'}{z-z'}\right)\end{aligned}\right\} = 0 \qquad (L'')$$

qui, ayant le même centre, se coupent suivant un nombre déterminé de droites qui sont les tangentes de

chacune des courbes appartenant au nombre déterminé de systèmes de courbes représentées par les équations (L′).

Le degré ou la nature des équations (L′) pouvant introduire pour mno un nombre déterminé de valeurs, nous les regardons comme appartenant à un nombre déterminé de systèmes de courbes; mais il sera toujours possible de considérer chacun de ces systèmes en particulier, indépendamment des autres.

Il suit de ce que nous venons d'exposer que le système général des lignes (A) peut toujours être considéré comme le lieu des tangentes d'un système de courbes à double courbure (L), et réciproquement tout ce que nous avons dit précédemment sur le système des lignes (A), peut s'appliquer aux tangentes d'un système quelconque de courbes à double courbure. Ces propriétés des tangentes des courbes à double courbure, suffisent pour développer ce que nous avons à dire sur les faisceaux de rayons courbes

CHAPITRE SECOND.

Catoptrique.

[8] Nous allons passer à l'application de cette théorie aux phénomènes de l'optique, en commençant par ceux produits par la lumière réfléchie, qui font l'objet de la catoptrique,

On appelle angle d'incidence l'angle compris entre le rayon incident et la normale à la surface qui le réfléchit ou le réfracte, et angle de réflexion ou de réfraction celui compris entre le rayon réfléchi ou réfracté et la même normale.

Dans la réflexion ordinaire l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, et le rayon réfléchi est compris dans le plan qui passe par le rayon incident et par la normale au point d'incidence. C'est sur ces deux principes donnés par l'expérience que nous établirons la théorie analytique de la catoptrique.

Soient XYZ les coordonnées rectangulaires d'un point lumineux, l'équation des projections d'un rayon de lumière sera

$$\frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c} \qquad (\alpha)$$

Si ce rayon frappe en un point $x'y'z'$ une surface

$$F.(x'y'z') = 0\,;\; p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0 \qquad (F)$$

il se réfléchira suivant une ligne droite dont nous représenterons l'équation par

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o} \qquad (A)$$

Les deux lignes (α) (A) forment des angles égaux avec la normale à la surface au point $x'y'z'$, et on exprimera cette condition en égalant entre eux les cosinus de ces angles; ce qui donne

$$\frac{ap+bq+cr}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{mp+nq+or}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (b)$$

En second lieu, le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale étant dans un même plan, on aura

$$m.(cq-br)+n.(ar-cp)+o.(bp-aq) = o \qquad (c)$$

Les deux équations (b) (c) renferment les conditions qui doivent déterminer $\frac{m}{o}$ $\frac{n}{o}$, et on en tire

$$\frac{m}{o} = \frac{pr.(a^2+b^2+c^2)+(cq-br).(bp-aq)\pm(ar-cp).(ap+bq+cr)}{r^2.(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2}$$

$$\frac{n}{o} = \frac{qr.(a^2+b^2+c^2)+(ar-cp).(bp-aq)\pm(br-cq).(ap+bq+cr)}{r^2.(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2}$$

Le signe supérieur, d'où on déduit

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{o}$$

appartient au rayon incident, et le signe inférieur qui donne

$$\frac{2\,(ap+bq+cr)\,p-a.\,(p^2+q^2+r^2)}{m}$$
$$=\frac{2\,(ap+bq+cr)\,q-b.\,(p^2+q^2+r^2)}{n}$$
$$=\frac{2\,(ap+bq+cr)\,r-c.\,(p^2+q^2+r^2)}{o}$$

appartient à une ligne qui fait un angle égal avec la normale, et qui est située, dans le même plan, du côté opposé, c'est-à-dire au rayon réfléchi, on en conclut

$$m=\lambda.\,[2\,(ap+bq+cr)\,p-a.\,(p^2+q^2+r^2)]$$
$$n=\lambda.\,[2\,(ap+bq+cr)\,q-b.\,(p^2+q^2+r^2)]$$
$$o=\lambda.\,[2\,(ap+bq+cr)\,r-c.\,(p^2+q^2+r^2)]$$

λ étant un coefficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Enfin, comme le point $x'y'z'$ est commun à la surface (F) et au rayon incident, on a

$$\frac{x'-X}{a}=\frac{y'-Y}{b}=\frac{z'-Z}{c}$$

et par conséquent

$$a=\lambda'.\,(x'-X)$$
$$b=\lambda'.\,(y'-Y)$$
$$c=\lambda'.\,(z'-Z)$$

λ' étant un nouveau coefficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Substituant ces valeurs de abc dans les expressions de mno, on aura ces dernières en fonction des coordonnées XYZ du point lumineux, et de celles $x'y'z'$ du point de la surface rencontré par le rayon incident.

[9] D'après les résultats du paragraphe [2], le système des rayons réfléchis (A) peut être considéré comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables (S) (S′) qui coupent la surface (F) du miroir suivant deux séries de courbes (ss) (s′s′) [3], et les points de rencontre de tous ces rayons se trouvent sur deux surfaces courbes (Σ) (Σ′) que nous nommerons surfaces caustiques.

En second lieu, si on substitue dans l'expression de $\cos \tau$ [4] les valeurs de mno, on trouve qu'elles satisfont à l'équation de condition (H), en sorte que les surfaces développables (S) (S′) se coupent toutes à angle droit.

En effectuant ce calcul, l'équation (H) se partage en deux parties, dont l'une est affectée des différentielles de pqr, et dont l'autre est en quantités algébriques. Ces deux parties se vérifient séparément et indépendamment l'une de l'autre; la dernière provient de la différentiation de mno, en ne faisant varier que abc : mais on peut simplifier le calcul de cette substitution en observant que les valeurs de mno étant indépendantes de la position des coordonnées, on est libre de supposer que le rayon réfléchi que l'on considère est dans un des axes des coordonnées, dans l'axe des z, par exemple; on a alors $m = 0$, $n = 0$, et l'équation (H) se réduit à

$$r.\left(\frac{dn}{dx'}\right) - p.\left(\frac{dn}{dz'}\right) + q.\left(\frac{dm}{dz'}\right) - r.\left(\frac{dm}{dy'}\right) = 0$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
&qr.\left[p+a.\left(\frac{dp}{dx'}\right)+b.\left(\frac{dq}{dx'}\right)+c.\left(\frac{dr}{dx'}\right)\right]\\
&+r.\left(\frac{dq}{dx'}\right).(ap+bq+cr)\\
&-br.\left[p.\left(\frac{dp}{dx'}\right)+q.\left(\frac{dq}{dx'}\right)+r.\left(\frac{dr}{dx'}\right)\right]\\
&-pq.\left[r+a.\left(\frac{dp}{dz'}\right)+b.\left(\frac{dq}{dz'}\right)+c.\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right]\\
&-p.\left(\frac{dq}{dz'}\right).(ap+bq+cr)\\
&+bp.\left[p.\left(\frac{dp}{dz'}\right)+q.\left(\frac{dq}{dz'}\right)+r.\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right]\\
&+pq.\left[r+a.\left(\frac{dp}{dz'}\right)+b.\left(\frac{dq}{dz'}\right)+c.\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right]\\
&+q.\left(\frac{dp}{dz'}\right).(ap+bq+cr)\\
&-aq.\left[p.\left(\frac{dp}{dz'}\right)+q.\left(\frac{dq}{dz'}\right)+r.\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right]\\
&-pr.\left[q+a.\left(\frac{dp}{dy'}\right)+b.\left(\frac{dq}{dy'}\right)+c\left(\frac{dr}{dy'}\right)\right]\\
&-r.\left(\frac{dp}{dy'}\right).(ap+bq+cr)\\
&+ar.\left[p.\left(\frac{dp}{dy'}\right)+q.\left(\frac{dq}{dy'}\right)+r.\left(\frac{dr}{dy'}\right)\right]
\end{aligned}\right\}=0 \quad (H')$$

Enfin, comme $m = 0$, $n = 0$ donnent

$$\frac{ar-cp}{p}=\frac{br-cq}{q}=\frac{ap+bq+cr}{r}$$

$$bp = aq.$$

Tous les termes de l'équation précédente sont multipliés par $ap + bq + cr$, et se réduisent à

$$\left.\begin{array}{l} r.\left(\frac{dq}{dx'}\right) - q.\left(\frac{dr}{dx'}\right) + p.\left(\frac{dr}{dy'}\right) \\ - r.\left(\frac{dp}{dy'}\right) + q.\left(\frac{dp}{dz'}\right) - p.\left(\frac{dq}{dz'}\right) \end{array}\right\} 0 =$$

équation qui a toujours lieu, puisque $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$ est la différentielle de l'équation $F.(x'y'z') = 0$.

Dans la différentiation des quantités mno nous n'avons pas eu égard à la variation du coefficient arbitraire λ, quoiqu'il soit en général fonction de $x'y'z'$, parce que, par la nature de l'équation (C), qui introduit dans le calcul les différentielles de mno, la différentielle $d\lambda$ s'évanouit d'elle-même; en effet, si, au lieu de mno, nous eussions eu λA, λB, λC, l'équation (C) eût été

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda dA + A d\lambda).(B dz' - C dy') \\ + (\lambda dB + B d\lambda).(C dx' - A dz') \\ + (\lambda dC + C d\lambda).(A dy' - B dx') \end{array}\right\} = 0$$

où l'on voit que le facteur de $d\lambda$ se réduit à zéro; en sorte qu'il n'entre dans le calcul que les différentielles dA, dB, dC qui prennent la place de celles dm, dn, do.

Si actuellement, par une des courbes (ss) et par le point lumineux on conçoit une surface conique (C), tous les rayons compris dans cette surface conique se rencontreront successivement après s'être réfléchis, et formeront une des surfaces développables (S); de même tous rayons compris dans la surface conique (C') qui passe par une des courbes (s's') et par le point lumineux, formeront, après s'être réfléchis, une des surfaces développables (S'). Ainsi nous considérerons dorénavant le

rayon incident (a) comme le lieu de l'intersection de deux surfaces coniques (C) (C'), et le rayon réfléchi (A), comme le lieu de l'intersection de deux surfaces développables (S) (S').

Les deux surfaces coniques (C) (C') se coupent à angle droit, comme les deux surfaces développables (S) (S'). En effet, les deux plans tangens aux surfaces (S) (S'), suivant la ligne (A), comprennent entre eux l'angle τ dont le cosinus est [4]

$$\cos\tau = \frac{(m^2+n^2+o^2).(MM'+NN'+OO') - (mM+nN+oO).(mM'+nN'+oO')}{[(m^2+n^2+o^2).(M^2+N^2+O^2) - (mM+nN+oO)^2]^{\frac{1}{2}}.[(m^2+n^2+o^2).(M'^2+N'^2+O'^2) - (mM'+nN'+oO')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

et ces deux plans tangens aux surfaces (C) (C'), suivant la ligne (a), comprennent entre eux l'angle θ dont le cosinus est

$$\cos.\theta = \frac{(a^2+b^2+c^2).(MM'+NN'+OO') - (aM+bN+cO).(aM'+bN'+cO')}{[(a^2+b^2+c^2).(M^2+N^2+O^2) - (aM+bN+cO)^2]^{\frac{1}{2}}.[(a^2+b^2+c^2).(M'^2+N'^2+O'^2) - (aM'+bN'+cO')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Or on a évidemment $\cos\theta = \cos\tau = 0$, à cause des équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{aM+bN+cO}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{mM+nN+oO}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \frac{aM'+bN'+cO'}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{mM'+nN'+oO'}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

ou

$$\frac{(ar-cp)M+(br-cq)N}{ap+bq+cr} + \frac{(mr-op)M+(nr-oq)N}{mp+nq+or} = 0$$

$$\frac{(ar-cp)M'+(br-cq)N'}{ap+bq+cr} + \frac{(mr-op)M'+(nr-oq)N'}{mp+nq+or} = 0$$

qui deviennent identiquement nulles, indépendamment des valeurs de MN, $M'N'$, quand on y substitue les

valeurs de mno. Ces équations sont indépendantes de MN, $M'N'$, parce que le rayon incident (a) et le rayon réfléchi (A) étant l'un et l'autre dans un plan passant par la normale, et faisant des angles égaux avec elle, feront aussi des angles égaux, mais de signe contraire, avec une ligne quelconque tracée dans le plan tangent au miroir (F), et c'est cette condition qui est exprimée par les équations (d).

[10] Considérons un faisceau de lumière compris entre quatre des surfaces coniques (C) (C) (C') C') infiniment proches, ce faisceau aura la forme d'une pyramide quadrangulaire rectangle comprenant entre ses arêtes deux petits angles ii', et les rayons qu'il contient, après s'être réfléchis, seront renfermés entre quatre surfaces développables (S) (S) (S') (S') dans un solide quadrangulaire rectangle comprenant entre ses arêtes deux nouveaux angles kk'.

Soit Δ la distance $[(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2]^{\frac{1}{2}}$ du point lumineux au point $x'y'z$ de la surface (F) du miroir, et D la distance du point $x'y'z'$ à l'œil situé dans le prolongement du rayon réfléchi. La lumière qui parvient à l'œil, après avoir été réfléchie, a parcouru depuis le point lumineux un espace exprimé par $\Delta+D$, et le faisceau de rayons *parti du point lumineux* auroit à cette distance, pour section perpendiculaire à son axe, un quadrilatère rectangle dont la surface seroit $(\Delta+D)^2ii'$; mais ce faisceau, au point où se trouve l'œil, a pour section perpendiculaire à son axe le quadrilatère rectangle

$(D \pm R)\,(D \pm R')\,kk'$. Or, comme l'intensité de la lumière est en raison inverse de l'étendue des surfaces sur lesquelles la même quantité de rayons est dispersée, elle se trouve au lieu où est situé l'œil après la réflexion, relativement à ce qu'elle eût été à la distance $\Delta + D$, en partant directement du point lumineux, dans le rapport de $(\Delta + D)\,ii'$ à $(D \pm R)\,(D \pm R')\,kk'$. On pourra donc exprimer la clarté T de l'image du point $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ vu sur point x' x' z' du miroir, par

$$T = e.\ \frac{(\Delta + D)^2\,ii'}{(D \pm R).\,(D \pm R')\,kk'}$$

e étant un coefficient constant qui exprime la clarté réelle du point lumineux. Il faut observer que le signe $\pm$ qui affecte R et R' est indépendant des valeurs positives ou négatives qui peuvent résulter pour R et R' de leur position relativement aux plans des coordonnées. Ces valeurs doivent toujours être prises positivement quand les lignes R et R' sont derrière le miroir, et négativement quand elles sont situées en avant.

Il ne reste plus qu'à déterminer l'expression du rapport $\frac{ii'}{kk'}$. Or deux rayons consécutifs (a) de la surface conique (C) comprennent entre eux l'angle très-petit i qui, étant égal à son sinus, a pour expression

$$i^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2).\,(da^2 + db^2 + dc^2) - (ada + bdb + cdc)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

et ces deux rayons, après avoir été réfléchis, comprennent entre eux l'angle k dont l'expression est

$$k^2 = \frac{(m^2 + n^2 + o^2).(dm^2 + dn^2 + do^2) - (m\,dm + n\,dn + o\,do)^2}{(m^2 + n^2 + o^2)^2}$$

Mais, à cause des équations (AB) [1], (G) [3], on a

$$(m^2 + n^2 + o^2).(dm^2 + dn^2 + do^2) - (m\,dm + n\,dn + o\,do)^2$$
$$= \frac{1}{\Delta^2}.(m^2 + n^2 + o^2).(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - (m\,dx' + n\,dy' + o\,dz')^2$$

et par conséquent

$$\frac{i^2}{k^2} = \frac{(m^2+n^2+o^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)}\Lambda^2.\left[\frac{(a^2+b^2+c^2).(da^2+db^2+dc^2) - (ada+bdb+cdc)^2}{(m^2+n^2+o^2).(dx'^2+dy'^2+dz'^2) - (mdx'+ndy'+odz')^2}\right]$$

ou, en substituant pour da, db, dc, leurs valeurs,

$$da = \lambda' dx' + (x' - X)\,d\lambda'$$
$$db = \lambda' dy' + (y' - Y)\,d\lambda'$$
$$dc = \lambda' dz' + (z' - Z)\,d\lambda'$$

$$\frac{i^2}{k^2} = \frac{(m^2+n^2+o^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\Lambda^2\lambda'^2.\left[\frac{(a^2+b^2+c^2).(dx'^2+dy'^2+dz'^2) - (adx'+bdy'+cdz')^2}{(m^2+n^2+o^2).(dx'^2+dy'^2+dz'^2) - (mdx'+ndy'+odz')^2}\right]$$

Or, d'après l'équation (d) du paragraphe précédent,

$$(m^2+n^2+o^2).(adx'+bdy'+cdz')^2 = (a^2+b^2+c^2).(mdx'+ndy'+odz')^2$$

On a donc

$$\frac{i^2}{K^2} = \frac{m^2 + n^2 + o^2}{a^2 + b^2 + c^2}\,\Lambda^2\lambda'^2 = \frac{R^2}{\Delta^2}$$

et enfin

$$\frac{i}{k} = \frac{R}{\Delta}\,;\quad \frac{i'}{k'} = \frac{R'}{\Delta}$$

$$T = e.\,\frac{(\Delta + D)^2\,RR'}{(D \pm R).(D \pm R')\,\Delta^2}.$$

On peut déjà observer qu'abstraction faite du terme $e.\,\frac{(\Delta + D)^2\,RR'}{\Delta^2}$, l'intensité T de la lumière réfléchie sera d'autant plus forte que $D \pm R$, $D \pm R'$ seront

plus petits; en sorte que le *maximum* d'intensité aura lieu pour les points où $D \pm R = 0$, $D \pm R' = 0$. Or $D \pm R = 0$ est l'équation de la surface caustique (Σ), et $D \pm R' = 0$ est l'équation de la surface caustique (Σ'). C'est donc à l'intersection de ces deux surfaces que se trouve le *maximum* de lumière réfléchie. Quand le lieu de cette intersection se réduit à un ou plusieurs points, on les nomme foyers des rayons réfléchis.

[11] Supposons actuellement que le rayon lumineux

$$\frac{x - X}{a} = \frac{y - Y}{b} = \frac{z - Z}{c} \qquad (a)$$

après s'être réfléchi au point $x'y'z'$ de la surface

$$F.\ (x'y'z') = 0;\quad p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0 \qquad (F)$$

suivant la ligne

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{o} \qquad (A)$$

soit réfléchi de nouveau par une seconde surface

$$F.\ (x_1y_1z_1) = 0;\quad p_1dx_1 + q_1dy_1 + r_1dz_1 = 0$$

suivant une ligne

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{o_1} \qquad (A_1)$$

le rayon (A), dans ce second cas, est considéré comme rayon incident; en sorte qu'on aura m, n, o en changeant, dans les expressions de mno [8], mno en $m_1n_1o_1$, et abc en mno; ce qui donne

$$m_{,} = \lambda''.\ [2\ (mp_{,} + nq_{,} + or_{,})\ p_{,} - m.\ (p_{,}^{2} + q_{,}^{2} + r_{,}^{2})]$$
$$n_{,} = \lambda''.\ [2\ (mp_{,} + nq_{,} + or_{,})\ q_{,} - n.\ (p_{,}^{2} + q_{,}^{2} + r_{,}^{2})]$$
$$o_{,} = \lambda''.\ [2\ (mp_{,} + nq_{,} + or_{,})\ r_{,} - o.\ (p_{,}^{2} + q_{,}^{2} + r_{,}^{2})]$$

λ'' étant un coefficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Enfin, comme $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ est un des points du rayon (A), on a

$$\frac{x_{,} - x'}{m} = \frac{y_{,} - y'}{n} = \frac{z_{,} - z'}{o}$$

$$m = \lambda'''.(x_{,} - x');\ n = \lambda'''.(y_{,} - y');\ o = \lambda'''.(z_{,} - z') \quad (e)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{x_{,} - x'}{2\ (ap + bq + cr)\ p - a.\ (p^{2} + q^{2} + r^{2})} \\ &= \frac{y_{,} - y'}{2\ (ap + bq + cr)\ q - b.\ (p^{2} + q^{2} + r^{2})} \\ &= \frac{z_{,} - z'}{2\ (ap + bq + cr)\ r - c.\ (p^{2} + q^{2} + r^{2})} \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Cette équation, jointe à celle $F.\ (x'y'z') = o$ (F), pourra servir à déterminer $x'y'z'$ *en fonctions* de $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, et ces valeurs substituées dans celles de mno (e), donneront ces dernières quantités en fonctions de $x_{,}, y_{,}, z_{,}$; en sorte que $m_{,}, n_{,}, o_{,}$ se trouveront déterminés en fonctions des coordonnées XYZ du point lumineux, et de celles $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ du point où se fait la seconde réflexion.

Nous pourrons donc par la suite considérer $x'y'z'$ comme des fonctions de $x_{,}, y_{,}, z_{,}$. Or, quoique ces fonctions dépendent de l'équation arbitraire (F), leurs différences partielles sont néanmoins liées entre elles par une équation de condition qu'il nous importe de connoître, et qui dépend d'un théorème général que nous allons exposer.

Soient trois équations de la forme

$$\left.\begin{aligned}(x'y'z'.\ x,y,z,) &= 0\\ [x'y'z'.\ x,y,z,] &= 0\\ \{x'y'z'\} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

on en pourra toujours tirer les valeurs de $x'y'z'$

$$\begin{aligned}x' &= \varphi.\ (x,y,z,)\\ y' &= \chi.\ (x,y,z,)\\ z' &= \psi.\ (x,y,z,)\end{aligned}$$

et il est évident que ces valeurs de $x'y'z'$, substituées dans la dernière des équations (g), la rendront identique par rapport à $x,y,z,$; mais l'équation différentielle de cette dernière équation est

$$p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\left[p.\left(\frac{dx'}{dx,}\right) + q.\left(\frac{dy'}{dx,}\right) + r.\left(\frac{dz'}{dx,}\right)\right] dx,\\ +&\left[p.\left(\frac{dx'}{dy,}\right) + q.\left(\frac{dy'}{dy,}\right) + r.\left(\frac{dz'}{dy,}\right)\right] dy,\\ +&\left[p.\left(\frac{dx'}{dz,}\right) + q.\left(\frac{dy'}{dz,}\right) + r.\left(\frac{dz'}{dz,}\right)\right] dz,\end{aligned}\right\} = 0$$

et comme elle est identique par rapport à $x,y,z,$, on a

$$\begin{aligned}p.\left(\frac{dx'}{dx,}\right) + q.\left(\frac{dy'}{dx,}\right) + r.\left(\frac{dz'}{dx,}\right) &= 0\\ p.\left(\frac{dx'}{dy,}\right) + q.\left(\frac{dy'}{dy,}\right) + r.\left(\frac{dz'}{dy'}\right) &= 0\\ p.\left(\frac{dx'}{dz,}\right) + q.\left(\frac{dy'}{dz,}\right) + r.\left(\frac{dz'}{dz,}\right) &= 0\end{aligned}$$

d'où, en éliminant $p\,q\,r$, on a l'équation de condition

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dx'}{dx_,}\right)\left(\frac{dy'}{dy_,}\right)\left(\frac{dz'}{dz_,}\right)-\left(\frac{dx'}{dx_,}\right)\left(\frac{dy'}{dz_,}\right)\left(\frac{dz'}{dy_,}\right)\\+&\left(\frac{dx'}{dy_,}\right)\left(\frac{dy'}{dz_,}\right)\left(\frac{dz'}{dx_,}\right)-\left(\frac{dx'}{dy_,}\right)\left(\frac{dy'}{dx_,}\right)\left(\frac{dz'}{dz_,}\right)\\+&\left(\frac{dx'}{dz_,}\right)\left(\frac{dy'}{dx_,}\right)\left(\frac{dz'}{dy_,}\right)-\left(\frac{dx'}{dz_,}\right)\left(\frac{dy'}{dy_,}\right)\left(\frac{dz'}{dx_,}\right)\end{aligned}\right\}=0. \quad (h)$$

Elle exprime que les six quantités $x'y'z'x_,y_,z_,$ sont liées entre elles par trois équations de la forme (g). On peut, par le calcul des combinaisons, étendre directement cette considération au cas où le nombre des équations (g), celui des variables $x'y'z'$ ou celui des variables $x_,y'z_,$ sont différens, et on obtiendra dans chaque hypothèse l'équation ou les équations de condition qui y sont relatives.

Les équations (f) (F) sont dans le cas des équations (g); en sorte que les fonctions $x'y'z'$ satisfont nécessairement à l'équation de condition (h).

En second lieu, si on a trois équations de la forme

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_, - x'}{z_, - z'} &= \Phi.\ (x'y'z') && (1)\\ \frac{y_, - y'}{z_, - z'} &= \Psi.\ (x'y'z') && (2)\\ [x'y'z'] &= 0 && (3)\end{aligned}\right\} \quad (g')$$

on en pourra toujours déduire les valeurs de $x'y'z'$,

$$\begin{aligned}x' &= \varphi.\ (x_,y_,z_,)\\ y' &= \chi.\ (x_,y_,z_,)\\ z' &= \downarrow.\ (x_,y_,z_,)\end{aligned}$$

et les fonctions $\varphi\,\chi\downarrow$ seront telles que si entre deux quelconques de ces équations on élimine une des variables

$x_{,}y_{,}z_{,}$, le résultat sera une relation linéaire entre les deux autres variables. En effet, si entre les deux premières de ces équations on élimine $y_{,}$, on aura un résultat entre $x'y'$ $x_{,}z_{,}$ qui devra être identique avec l'équation (1) dans laquelle on auroit substitué pour z' sa valeur tirée de l'équation (3). Or, comme l'équation (1) est linéaire par rapport à $x_{,}z_{,}$, il est nécessaire que le résultat de l'élimination proposée le soit aussi. Les équations (f) (F) étant dans le cas des équations (g'), les fonctions $x'y'z'$ doivent satisfaire à la condition que nous venons d'énoncer.

[12] D'après les résultats du paragraphe [2], les rayons réfléchis $(A_{,})$ peuvent être regardés comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables $(S_{,}S_{,})$ $(S_{,}'S_{,}')$ qui coupent la surface du second miroir $(F_{,})$ suivant deux séries de courbes $(s_{,}s_{,})$ $(s_{,}'s_{,}')$, et les points de rencontre de tous ces rayons se trouvent sur deux surfaces caustiques (Σ') $(\Sigma_{,}')$.

Si on substitue les valeurs précédentes de $m_{,}n_{,}o_{,}$ dans l'équation (H) [4], cette équation n'est plus satisfaite; en sorte que les systèmes de surfaces développables $(S_{,}S_{,})$ $(S_{,}'S_{,}')$ ne se coupent pas à angle droit comme les surfaces (SS) $(S'S')$ formées par les rayons après la première réflexion.

On peut simplifier le calcul de cette substitution, comme nous l'avons déjà fait, en observant que les valeurs de $m_{,}n_{,}o_{,}$ sont indépendantes de la position des coordonnées; en sorte qu'on peut supposer le rayon ré-

fléchi qu'on considère comme étant, par exemple, dans l'axe des z : on a alors $m_{,} = 0$, $n_{,} = 0$, et l'équation (H) devient

$$r_{,} \cdot \left(\frac{dn_{,}}{dx_{,}}\right) - p_{,} \cdot \left(\frac{dn_{,}}{dz_{,}}\right) + q_{,} \cdot \left(\frac{dm_{,}}{dz_{,}}\right) - r_{,} \cdot \left(\frac{dm_{,}}{dy_{,}}\right) = 0. \quad (H_{,})$$

et comme $m_{,} = 0$, $n_{,} = 0$ donnent $\left(\frac{dm_{,}}{dq_{,}}\right) = 0$, $\left(\frac{dn_{,}}{dp_{,}}\right) = 0$, $np_{,} = mq_{,}$,

$$\frac{mr_{,} - op_{,}}{p_{,}} = \frac{nr_{,} - oq_{,}}{q_{,}} = \frac{mp_{,} + nq_{,} + or_{,}}{r_{,}} = (m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}$$

l'équation ($H_{,}$) se transforme en la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} r_{,} \cdot \left(\frac{dq_{,}}{dx_{,}}\right) - q_{,} \cdot \left(\frac{dr_{,}}{dx_{,}}\right) + p_{,} \cdot \left(\frac{dr_{,}}{dy_{,}}\right) \\ - r' \cdot \left(\frac{dp_{,}}{dy_{,}}\right) + q_{,} \cdot \left(\frac{dp'}{dz_{,}}\right) - p_{,} \cdot \left(\frac{dq_{,}}{dz_{,}}\right) \end{array}\right\} \cdot (mp_{,} + nq_{,} + or_{,})$$

$$= \left[r_{,} \cdot \left(\frac{dx'}{dy_{,}}\right) - q_{,} \cdot \left(\frac{dx'}{dz_{,}}\right) + p_{,} \cdot \left(\frac{dy'}{dz_{,}}\right) + r_{,} \cdot \left(\frac{dy'}{dx_{,}}\right)\right] \cdot (p_{,}^2 + q_{,}^2 + r_{,}^2)$$

$$+ 2\, q_{,} r_{,} \cdot \left[p_{,} \cdot \left(\frac{dx'}{dx_{,}}\right) + q_{,} \cdot \left(\frac{dy'}{dx_{,}}\right) + r_{,} \cdot \left(\frac{dz'}{dx_{,}}\right)\right]$$

$$- 2\, p_{,} r_{,} \cdot \left[p_{,} \cdot \left(\frac{dx'}{dy_{,}}\right) + q_{,} \cdot \left(\frac{dy'}{dy_{,}}\right) + r_{,} \cdot \left(\frac{dz'}{dy_{,}}\right)\right]$$

Le premier membre de cette équation se réduit de lui-même, puisque $p_{,}dx_{,} + q_{,}dy_{,} + r_{,}dz_{,} = 0$ est la différentielle de $F_{,}(x_{,}, y_{,}, z_{,}) = 0$; mais le second membre ne peut être nul que dans des cas particuliers, puisque les coefficiens différentiels $\left(\frac{dx'}{dx_{,}}\right)$ $\left(\frac{dx'}{dy_{,}}\right)$ $\left(\frac{dx'}{dz_{,}}\right)$ $\left(\frac{dy'}{dx_{,}}\right)$

ne sont liés généralement entre eux que par l'équation (h) du paragraphe précédent.

On aura donc, à considérer dans le systèmes des surfaces développables $(S_,S_,)$ $(S_,'S_,')$, l'angle variable τ suivant lequel ces surfaces se coupent deux à deux [4]; et la disposition des rayons $(A_,)$ sera telle qu'on ne pourra concevoir une surface qui leur soit normale.

[13] Quelle que soit la surface développable $(S_,)$ ou $(S_,')$ formée par une suite de rayons après leur seconde réflexion, il est évident que ces rayons, en partant du point lumineux, formoient une surface conique $(C_,')$ ou $(C_,')$; et si on considère le faisceau lumineux compris entre quatre surfaces coniques $(C_,)$ $(C_,)$ $(C_,')$ $(C_,')$ infiniment proches, et celui compris entre les quatre surfaces développables correspondantes $(S_,)$ $S_,)$ $(S_,')$ $(S_,')$, comme ces deux faisceaux contiennent la même quantité de rayons, il sera toujours possible de déterminer l'intensité T de la lumière réfléchie, comme nous l'avons fait dans le cas d'une simple réflexion.

Soit donc un faisceau de lumière compris entre quatre surfaces coniques $(C_,)$ $(C_,)$ $(C_,')$ $(C_,')$ infiniment proches; ce faisceau aura la forme d'une pyramide quadrangulaire obliquangle, comprenant entre ses mètres deux petits angles i, i', et entre ses faces deux angles $\theta_,$, $180° - \theta_,$, et les rayons qu'il contient seront, après la seconde réflexion, renfermés entre les quatre surfaces développables $(S_,)$ $(S_,)$ $(S_,')$ $(S_,')$, dans un solide qua-

drangulaire obliquangle comprenant entre ses arêtes deux petits angles k, k', et entre ses faces deux angles $\tau_,$, $180° - \tau_,$.

Soit Δ la distance $[(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2]^{\frac{1}{2}}$ du point lumineux XYZ au point $x'y'z'$ de la surface (F) où se fait la première réflexion.

$\Delta_,$ la distance $[(x_,-x')^2+(y_,-y')^2+(z_,-z')^2]^{\frac{1}{2}}$ du point $x'y'z'$ au point $x_,y_,z_,$ de la surface (F,) où se fait la seconde réfraction.

Enfin D la distance du point $x_,y_,z_,$ à l'œil situé dans le prolongement du rayon réfléchi.

La lumière qui parvient à l'œil après avoir été réfléchie pour la seconde fois, a parcouru depuis le point lumineux un espace exprimé par $\Delta + \Delta_, + D$, et le faisceau de rayons auroit à cette distance, pour section perpendiculaire à son axe, un quadrilatère obliquangle dont la surface seroit $(\Delta + \Delta' + D)^2\, i, i'.\ sin.\ \theta_,$; mais ce faisceau, au point où se trouve l'œil, a pour section perpendiculaire à son axe un quadrilatère obliquangle dont la surface est $(D \pm R_,)\ (D \pm R_,')\ k, k'.\ sin.\ \tau_,$. On aura donc, d'après ce qui a été dit précédemment pour l'expression de l'intensité de la lumière,

$$T = e\,\frac{(\Delta + \Delta_, + D)^2\ i, i'.\ sin.\ \theta_,}{(D \pm R_,).\ (D \pm R_,').\ k, k'.\ sin.\ \tau_,}$$

quantité qu'il s'agit d'exprimer en fonction des coordonnées XYZ du point lumineux et de celles $x_,y_,z_,$ du point où se fait la seconde réflexion.

Les surfaces coniques (C,) (C,') qui passent par le

rayon (a), coupent la surface (F) du premier miroir suivant les deux courbes

$$\frac{\mu}{dx'} = \frac{\nu}{dy'} = \frac{\xi}{dz'} = \frac{1}{d\omega} \qquad (\xi)$$

$$\frac{\mu'}{dx'} = \frac{\nu'}{dy'} = \frac{\xi'}{dz'} = \frac{1}{d\omega'} \qquad (\xi')$$

dont les tangentes sont, au point $x'y'z'$,

$$\frac{\mu}{x - x'} = \frac{\nu}{y - y'} = \frac{\xi}{z - z'} \qquad (t)$$

$$\frac{\mu'}{x - x'} = \frac{\nu'}{y - y'} = \frac{\xi'}{z - z'} \qquad (t')$$

et les surfaces développables correspondantes $(S_,)$ $(S_,')$ coupent la surface du second miroir $(F_,)$ suivant les courbes [1]

$$\frac{M_,}{dx_,} = \frac{N_,}{dy_,} = \frac{O_,}{dz_,} = \frac{1}{d\omega_,}$$

$$\frac{M_,'}{dx_,} = \frac{N_,'}{dy_,} = \frac{O_,'}{dz_,} = \frac{1}{d\omega_,'}$$

dont les tangentes sont

$$\frac{M_,}{x - x_,} = \frac{N_,}{y - y_,} = \frac{O_,}{z - z_,} \qquad (D_,)$$

$$\frac{M_,'}{x - x_,} = \frac{N_,'}{y - y_,} = \frac{O_,'}{z - z_,} \qquad (D_,')$$

$\omega\omega'\omega_,\omega_,'$ étant des quantités arbitraires qui disparoissent du calcul. Or nous avons déterminé [2] $M_,N_,O_,$ $M_,'N_,'O_,'$ en fonctions de $m_,n_,o_,$, [11] $m_,n_,o_,$ en fonctions de $x'y'z'$ $x_,y_,z_,$, et enfin $x'y'z'$ en fonctions de $x_,y_,z_,$, et comme on a

$$dx' = \left(\frac{dx'}{dx_,}\right) dx_, + \left(\frac{dx'}{dy_,}\right) dy_, + \left(\frac{dx'}{dz_,}\right) dz_,$$
$$dy' = \left(\frac{dy'}{dx_,}\right) dx_, + \left(\frac{dy'}{dy_,}\right) dy_, + \left(\frac{dy'}{dz_,}\right) dz_,$$
$$dz' = \left(\frac{dz'}{dx_,}\right) dx_, + \left(\frac{dz'}{dy_,}\right) dy_, + \left(\frac{dz_,}{dz_,}\right) dz_,$$

on en conclut

$$\left.\begin{aligned} dx' = \mu d\omega = d\omega_,.\Big\{&\left(\frac{dx'}{dx_,}\right) M_, + \left(\frac{dx'}{dy_,}\right) N_, \\ &+ \left(\frac{dx'}{dz_,}\right) O_,\Big\} \\ dy' = \nu d\omega = d\omega_,.\Big\{&\left(\frac{dy'}{dx_,}\right) M_, + \left(\frac{dy'}{dy_,}\right) N_, \\ &+ \left(\frac{dy'}{dz_,}\right) O_,\Big\} \\ dz' = \xi d\omega = d\omega_,.\Big\{&\left(\frac{dz'}{dx_,}\right) M_, + \left(\frac{dz'}{dy_,}\right) N_, \\ &+ \left(\frac{dz'}{dz_,}\right) O_,\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (\xi s_,)$$

$$\left.\begin{aligned} dy' = \nu' d\omega' = d\omega_,'.\Big\{&\left(\frac{dx'}{dx_,}\right) M_,' + \left(\frac{dx'}{dy_,}\right) N_,' \\ &+ \left(\frac{dx'}{dz_,}\right) O_,'\Big\} \\ dz' = \xi' d\omega' = d\omega_,'.\Big\{&\left(\frac{dy'}{dx_,}\right) M_,' + \left(\frac{dy'}{dy_,}\right) N_,' \\ &+ \left(\frac{dy'}{dz_,}\right) O_,'\Big\} \\ dx' = \mu' d\omega' = d\omega_,'.\Big\{&\left(\frac{dz'}{dx_,}\right) M_,' + \left(\frac{dz'}{dy_,}\right) N_,' \\ &+ \left(\frac{dz'}{dz_,}\right) O_,'\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (\xi' s_,')$$

équations qui déterminent $\mu\nu\xi\ \mu'\nu'\xi'$ en fonctions de $x_,y_,z_,$; en sorte qu'on a en fonction de ces quantités

tous les élémens qui entrent dans l'expression $\frac{i_i i_i' . \sin. \theta_i}{k_i k_i' . \sin. \tau_i}$.
En effet, d'après le paragraphe [10], on a

$$\frac{i_i^2}{k_i^2} = \left(\frac{m_i^2+n_i^2+o_i^2}{a^2+b^2+c^2}\right) \Lambda_i^2 \lambda'^2 . \left[\frac{(a^2+b^2+c^2).(dx'^2+dy'^2+dz'^2)-(adx'+bdy'+cdz')^2}{(m_i^2+n_i^2+o_i^2).(dx_i^2+dy_i^2+dz_i^2)-(m_i dx_i+n_i dy_i+o_i dz_i)^2}\right]$$

et par conséquent, en mettant pour $dx'\,dy'\,dz'\;dx_i, dy_i, dz_i$ leurs valeurs

$$\frac{i_i}{k_i} = \frac{R_i}{\Delta} . \left(\frac{m_i^2+n_i^2+o_i^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\omega}{d\omega_i} . \left[\frac{(a^2+b^2+c^2).(\mu^2+\nu^2+\xi^2)-(a\mu+b\nu+c\xi)^2}{(m_i^2+n_i^2+o_i^2).(M_i^2+N_i^2+O_i^2)-(mM_i+nN_i+oO_i)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{i_i'}{k_i'} = \frac{R_i'}{\Delta} . \left(\frac{m_i^2+n_i^2+o_i^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\omega_i}{d\omega_i'} . \left[\frac{(a^2+b^2+c^2).(\mu'^2+\nu'^2+\xi'^2)-(a\mu'+b\nu'+c\xi')^2}{(m_i^2+n_i^2+o_i^2).(M_i'^2+N_i'^2+O_i'^2)-(mM_i'+nN_i'+oO_i')^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

L'angle θ_i est compris entre les plans qui passent par les lignes (a) (t) et celui qui passe par les lignes (a) (t_i), et on a

$$\sin. \theta_i = \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} [a.(\nu'\xi-\nu\xi')+b.(\mu\xi'-\mu'\xi)+c.(\mu'\nu-\mu\nu')]}{[(a^2+b^2+c^2).(\mu^2+\nu^2+\xi^2)-(a\mu+b\nu+c\xi)^2]^{\frac{1}{2}} [(a^2+b^2+c^2).(\mu'^2+\nu'^2+\xi'^2)-(a\mu'+b\nu'+c\xi')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

De même l'angle τ_i est compris entre le plan qui passe par les lignes (A_i) (D_i) et celui qui passe par les lignes (A_i) (D'_i), et on a

$$\sin. \tau_i = \frac{(m_i^2+n_i^2+o_i^2).[m_i.(N_i'O_i-N_iO_i')+n_i.(M_iO_i'-M_i'O_i)+o_i.(M_i'N_i-M_iN_i')}{[(m_i^2+n_i^2+o_i^2).(M_i^2+N_i^2+O_i^2)-(m_iM_i+nN_i+oO_i)]^{\frac{1}{2}}.[(m_i^2+n_i^2+o_i^2).(M_i'^2+N_i'^2+O_i'^2)-(m_iM_i'+n_iN_i'+o}$$

et enfin

$$T = e. \frac{(\Delta+\Delta_i+D)^2\, i_i i_i' . \sin. \theta_i}{(D \pm R_i).(D \pm R_i')\, k_i k_i' . \sin. \tau_i} = c. \frac{(\Delta+\Delta_i+D)^2\, R' R_i'}{(D \pm R_i).(D \pm R_i')\, \Delta^2}$$
$$\times \left(\frac{m_i^2+n_i^2+o_i^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{2}} . \frac{d\omega\, d\omega'}{d\omega_i\, d\omega_i'} . \left[\frac{a.(\nu'\xi-\nu\xi')+b.(\mu\xi'-\mu'\xi)+c.(\mu'\nu-\mu\nu')}{m_i.(N_i'O_i-N_iO_i')+n_i.(M_iO_i'-M_i'O_i)+o_i.(M_i'N_i-M_iN_i')}\right]$$

Le coefficient $\frac{d\omega.\, d\omega'}{d\omega_i.\, d\omega_i'}$ disparoît quand on substitue à $\mu\nu\xi\;\mu'\nu'\xi'$ leurs valeurs en x, y, z, tirées des équations (ξs_i) ($\xi' s_i'$).

Si la lumière a éprouvé un nombre $n+1$ de réflexions, on parviendra à un résultat semblable en changeant la caractéristique, en $_n$, et en déterminant les quantités $\left(\frac{dx'}{dx_n}\right)$, $\left(\frac{dx'}{dy_n}\right)$, etc., d'après la nature des surfaces réfléchissantes. Or, de même qu'on a déterminé $x'y'z'$ en fonctions de $x_1 y_1 z_1$, on trouvera ces dernières en fonctions de $x_{11} y_{11} z_{11}$, et ainsi de suite; en sorte que le résultat ne contiendra plus que les coordonnées XYZ du point lumineux, et celles $x_n y_n z_n$ du point où se fait la dernière réflexion.

[14] Si les coordonnées XYZ du point lumineux, et celles $X'Y'Z'$ du point où est situé l'œil, sont déterminées, on en conclura les coordonnées $x'y'z'$, $x_1 y_1 z_1$, $x_{11} y_{11} z_{11}$ ..... $x_n y_n z_n$ des points où se font les différentes réflexions. En effet, les coordonnées $X'Y'Z'$ appartenant au dernier rayon réfléchi, on aura

$$\frac{X'-x_n}{m_n} = \frac{Y'-y_n}{n_n} = \frac{Z'-z_n}{o_n}$$

équation qui, jointe à celle de la surface F_n. $(x_n y_n z_n) = o$ (F_n), servira à déterminer $x_n y_n z_n$ en fonctions de XYZ $X'Y'Z'$; et comme les autres coordonnées $x'y'z'$, $x_1 y_1 z_1$, $x_{11} y_{11} z_{11}$ ..... $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ sont données en fonctions de $x_n y_n z_n$, on aura sur chaque surface le point où se fait la réflexion du faisceau lumineux qui parvient à l'œil.

Si, au lieu d'un point lumineux XYZ, on a une

suite de points lumineux situés sur une courbe à double courbure

$$[XYZ] = 0; \quad (XYZ) = 0 \qquad (X)$$

on éliminera XYZ entre ces deux équations et les trois qui donnent les valeurs de $x_n y_n z_n$, et on aura entre ces dernières deux équations qui exprimeront sur la surface (F_n) la courbe suivant laquelle sera vue la courbe (X).

Si au lieu d'une courbe lumineuse (X), on avoit une surface courbe

$$[XYZ] = 0$$
$$\pi dX + \pi' dY + \pi'' dZ = 0$$

on déterminera la courbe qui indique son contour apparent, en observant que son plan tangent étant

$$(x - X)\pi + (y - Y)\pi' + (z - Z)\pi'' = 0,$$

chaque rayon incident a pour équation

$$\frac{x - X}{x' - X} = \frac{y - Y}{y' - Y} = \frac{z - Z}{z' - Z}$$

en sorte que si ce rayon est situé dans le plan tangent, on a

$$(x' - X)\pi + (y' - Y)\pi' + (z' - Z)\pi'' = 0$$

Or si on substitue dans cette équation les valeurs de $x'y'z'$ en fonction de $XYX\,X'Y'Z'$, on aura une nouvelle équation qui, jointe à celle $[XYZ] = 0$, sera équivalente aux deux équations (X); ce qui ramènera cette question à la précédente.

CHAPITRE TROISIÈME.

Dioptrique.

[15] La dioptrique a pour objet la recherche et la combinaison des phénomènes produits par la lumière réfractée.

Lorsqu'un rayon lumineux est réfracté sur la surface plane ou courbe qui sépare deux milieux de densité différente, la ligne d'incidence et celle de réfraction sont comprises dans un plan qui passe par la normale au point d'incidence, et forment avec cette normale des angles dont les sinus sont dans un rapport constant. C'est sur ce principe que nous allons développer, qu'est fondée la théorie de la réfraction ordinaire.

L'expérience prouve qu'un rayon lumineux

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c} = \frac{u}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = \frac{du}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

dirigé obliquement sur un corps diaphane terminé par une surface plane

$$p.(x-x') + q.(y-y') + r.(z-z') = 0 \quad (P)$$

parvient en ligne droite jusqu'à une distance insensible de cette surface, et qu'après l'avoir traversée jusqu'à

une distance également insensible, il se dirige, suivant une nouvelle droite

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x'}{m} &= \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o} = \frac{u'}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dx}{m} &= \frac{dy}{n} = \frac{dz}{o} = \frac{du'}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Or, en nommant ϖ la force qui tend à détourner une molécule de lumière quand elle approche de la surface (P), et en observant que cette force est dirigée perpendiculairement à cette surface, on aura

$$\frac{d^2x}{p\,dt^2} = \frac{d^2y}{q\,dt^2} = \frac{d^2z}{r\,dt^2} = \frac{\varpi}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\alpha)$$

On tire de cette équation

$$dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,\frac{d^2y}{dt^2} + dz\,\frac{d^2z}{dt^2} = \varpi\,\frac{p\,dx+q\,dy+r\,dz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \alpha + 2\int \varpi\,\frac{p\,dx+q\,dy+r\,dz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Tant que la molécule de lumière est comprise dans le rayon incident (a) elle n'est pas soumise à l'action du corps diaphane, puisqu'elle continue à se mouvoir en ligne droite. Substituant donc dans cette équation, pour $dx\,dy\,dz$, leurs valeurs prises dans l'équation (a), et faisant $\varpi = 0$, on aura

$$\frac{du^2}{dt^2} = \alpha$$

et par conséquent

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} + 2\int \varpi.\,\frac{p\,dx+q\,dy+r\,dz}{(p^2+o^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

De même, lorsque la molécule lumineuse sera comprise dans le rayon réfracté (A), comme elle continue à se mouvoir en ligne droite dans l'intérieur du corps diaphane, en formant un angle constant avec la direction de la force ϖ, elle n'est plus soumise à l'influence de cette force, et a éprouvé de sa part toute l'action qu'elle pouvoit lui imprimer.

L'intégrale $2 f\varpi. \frac{p\,dx + q\,dy + r\,dz}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$, prise dans les limites de l'influence de la force ϖ, est donc égale à une constante $\frac{dC^2}{dt^2}$; en sorte qu'en substituant dans l'équation précédente les valeurs de $dx\ dy\ dz$, prise dans l'équation (A), elle devient

$$\frac{du'^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} + \frac{dC^2}{dt^2}$$

$\frac{du}{dt}$ est la vitesse de la lumière, tant qu'elle se meut dans le rayon incident (a). $\frac{du'}{dt}$ est sa vitesse lorsqu'elle se meut dans le rayon réfracté (A), et on voit que le carré $\frac{du^2}{dt^2}$ de la vitesse est augmenté, par l'influence du corps diaphane, d'une quantité constante $\frac{dC^2}{dt^2}$ indépendante de $a\,b\,c$; en sorte que nous regarderons par la suite les vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$ et leur rapport $\frac{du'}{du}$, comme des constantes indépendantes de l'inclinaison du rayon incident.

On tire de l'équation (α)

$$p\,d^2y - q\,d^2x = r\,d^2x - p\,d^2z = q\,d^2z - r\,d^2y = 0$$

et, en intégrant,

$$\frac{pdy - qdx}{f} = \frac{rdx - pdz}{f'} = \frac{qdz - rdy}{f''} = dt$$

Quand la molécule de lumière se meut dans le rayon incident (a), on a, en substituant dans les équations précédentes, les valeurs de $dx\ dy\ dz$ prises dans l'équation (a),

$$\frac{bp - aq}{f} = \frac{ar - cp}{f'} = \frac{cq - br}{f''} = \frac{dt}{du}(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

De même, lorsque la molécule de lumière se meut dans le rayon réfracté (A), on a, en substituant dans les mêmes équations les valeurs de $dx\ dy\ dz$ tirées de l'équation (A),

$$\frac{ap - mq}{f} = \frac{mr - op}{f'} = \frac{oq - nr}{f''} = \frac{dt}{du'}(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}$$

Enfin, en éliminant entre les deux dernières équations $ff'f''$, on obtient

$$\frac{bp - aq}{np - nq} = \frac{ar - cp}{mr - op} = \frac{cq - br}{oq - nr} = \frac{du'}{du} \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}{(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{a}\,\alpha)$$

équation qui pourra servir à déterminer les nombres $\frac{m}{o}, \frac{n}{o}$ en fonction de ceux $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ et de la constante $\frac{du'}{du}$. Cette équation peut être changée dans les deux suivantes :

$$\left.\begin{matrix} m.\,(cq - br) \\ + n.\,(ar - cp) \\ + o.\,(bp - aq) \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} a.\,(oq - nr) \\ + b.\,(mr - op) \\ + c.\,(np - mq) \end{matrix}\right\} = 0$$

$$\left[\frac{(cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2}{(oq - nr)^2 + (mr - op)^2 + (np - mq)^2}\right] \cdot \frac{(m^2 + n^2 + o^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{du'}{du}$$

La première exprime que le rayon incident (a) et le rayon réfracté (A) sont dans un plan perpendiculaire à la surface (P). La seconde exprime que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est égal à la constante $\frac{du'}{du}$.

On peut déterminer ce rapport par l'expérience, en observant pour une valeur particulière de a, b, c, la valeur correspondante de m, n, o. Nous le représenterons à l'avenir par l, et nous le regarderons comme une constante donnée par l'expérience.

Le nombre l est différent pour chaque corps de la nature, et peut servir à déterminer le rapport de leurs forces réfractives. En effet, nous avons vu que l'action du corps diaphane sur la lumière avoit augmenté le carré de sa vitesse d'une quantité

$$\frac{dC^2}{dt^2} = \frac{du'^2}{dt^2} - \frac{du^2}{dt^2} = \left(\frac{du'^2}{du^2} - 1\right).\frac{du^2}{dt^2} = (l^2 - 1).\frac{du^2}{dt^2}.$$

L'action d'un second corps diaphane augmentera de même le carré de la vitesse de la lumière d'une quantité $(l'^2 - 1).\frac{du^2}{dt^2}$; en sorte que

$$\frac{\textit{action du premier corps}}{\textit{action du second corps}} = \frac{l^2 - 1}{l'^2 - 1}$$

Les coefficiens $l^2 - 1$, $l'^2 - 1$ sont variables dans chaque corps proportionnellement à sa densité, mais il ne sont pas proportionnels aux densités de deux corps différens d'où on peut conclure que la force ϖ n'est pas proportionnelle aux densités, et qu'elle dépend d'un attraction

élective de chaque substance pour la lumière. Nous ignorons la loi suivant laquelle agit cette force ; ce qui d'ailleurs n'est pas nécessaire pour calculer ses effets : mais l'expérience a prouvé que son influence s'étendoit à une si petite distance de la surface des corps diaphanes, qu'on pouvoit, dans le calcul de son action, négliger la courbure d'une très-petite goutte de liquide ; en sorte que le sinus de l'angle d'incidence et celui de l'angle de réfraction sont encore dans un rapport constant, comme si ce corps étoit limité par un plan indéfini qui se confondroit avec le plan tangent au point d'incidence.

Nous supposerons donc par la suite que lorsqu'un rayon de lumière frappe en un point $x'y'z'$ la surface courbe d'un corps diaphane

$$F.(x'y'z') = 0 ; \quad p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0 \qquad (F)$$

l'action exercée sur la lumière est la même que celle qu'exerceroit le même corps terminé par le plan tangent au point $x'y'z'$,

$$p.(x - x') + q.(y - y') + r.(z - z') = 0 \qquad (P)$$

Si on substitue dans l'équation $(a\alpha)$, pour $\frac{du'}{du}$, le nombre l qui le représente, on en déduira pour $\frac{m}{o}$, $\frac{n}{o}$ les valeurs suivantes :

$$\frac{m}{o} = \frac{prl^2.(a^2+b^2+c^2)+(cq-br).(bp-aq)\pm(ar-cp).[(p^2+q^2+r^2).(a^2+b^2+c^2).(l^2-1)+(ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2r^2.(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2}$$

$$\frac{n}{o} = \frac{qrl^2.(a^2+b^2+c^2)+(ar-cp).(bp-aq)\pm(br-cq).[(p^2+q^2+r^2).(a^2+b^2+c^2).(l^2-1)+(ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2r^2.(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2}$$

Le signe supérieur appartient au rayon réfracté, et le signe inférieur à une ligne qui fait un angle égal avec la normale, mais qui est située du côté opposé. On a donc

$$m = \lambda.\left\{\begin{array}{l} prl^2.(a^2+b^2+c^2)+(cq-br).(bp-aq) \\ +(ar-cp).[(p^2+q^2+r^2).(a^2+b^2+c^2).(l^2-1)+(ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

$$n = \lambda.\left\{\begin{array}{l} qrl^2\ (a^2+b^2+c^2)+ar-cp).(bp-aq) \\ +(br-cq).[(p^2+q^2+r^2).(a^2+b^2+c^2).(l^2-1)+(ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

$$o = \lambda.\left\{l^2r^2.(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2\right\}$$

λ étant un coefficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Enfin, comme le point $x'y'z'$ est commun à la surface réfringente et au rayon incident; on a

$$\frac{x'-X}{a} = \frac{y'-Y}{b} = \frac{z'-Z}{c}$$

$$a = \lambda'.(x'-X)\ ;\ b = \lambda.(y'-y)\ ;\ c = \lambda'(z'-Z)$$

λ' étant un nouveau coefficient qui s'évanouit du calcul. Substituant ces valeurs de abc dans celles de mno, on aura ces dernières en fonctions des coordonnées XYZ du point lumineux, et de celles $x'y'z'$ du point de la surface rencontré par le rayon incident.

Nous observerons que si on considère la réfraction comme nulle, c'est-à-dire si on fait $l = 1$, et si on prend le signe inférieur dans les expressions de $\frac{m}{o}$, $\frac{n}{o}$, on aura les valeurs de ces quantités pour le rayon réfléchi telles qu'elles ont été déterminées précédemment [8]. Cette observation s'étend à tous les résultats qui se présenteront par la suite dans la dioptrique.

[16] D'après les résultats du paragraphe [2], le système des rayons réfractés (A) peut être considéré comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables (SS) (S'S') qui coupent la surface réfringente (F), suivant les deux séries de courbes (ss) (s's') [3], et les points de rencontre de tous ces rayons se trouvent sur deux surfaces courbes (Σ) (Σ') que nous nommerons, comme dans la catoptrique, surfaces caustiques.

Nous désignerons de même par (CC) (C'C') les systèmes de surfaces coniques formées par la suite des rayons incidens qui, après leur réfraction, forment les surfaces développables (SS) (S'S').

Si on substitue dans l'expression de *cos.* τ les valeurs de mno, on trouve qu'elles satisfont à l'équation de condition (H) [4]; en sorte que les surfaces développables (SS) (S'S') se coupent à angle droit.

On peut simplifier le calcul de cette substitution comme nous l'avons déjà fait [9]; alors l'équation (H) devient

$$r.\left(\frac{dn}{dx'}\right) - p.\left(\frac{dn}{dz'}\right) + q.\left(\frac{dm}{dz'}\right) - r.\left(\frac{dm}{dy'}\right) = 0 \quad (H')$$

et comme $m = 0$, $n = 0$ donnent

$$\frac{ar - cp}{p} = \frac{br - cq}{q} = -l.\,(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$bp = aq$$

on en conclut

$$r.\left(\frac{dn}{da}\right) - p.\left(\frac{dn}{dc}\right) + q.\left(\frac{dm}{dc}\right) - r.\left(\frac{dm}{db}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dm}{dp}\right) = \left(\frac{dn}{dq}\right) = -\left(\frac{dm}{dr}\right).\frac{r}{p} = -\left(\frac{dn}{dr}\right).\frac{r}{q}$$

$$\left(\frac{dm}{dq}\right) = 0\,;\quad \left(\frac{dn}{dp}\right) = 0$$

et par conséquent

$$\left(\frac{dn}{dx'}\right) = \left(\frac{dn}{dq}\right).\left(\frac{dq}{dx'}\right) + \left(\frac{dn}{dr}\right).\left(\frac{dr}{dx'}\right)$$
$$+\left(\frac{dn}{da}\right) = \left(\frac{dm}{dp}\right).\left[\left(\frac{dq}{dx'}\right) - \frac{q}{r}.\left(\frac{dr}{dx'}\right)\right] + \left(\frac{dn}{da}\right)$$
$$\left(\frac{dn}{dz'}\right) = \left(\frac{dn}{dq}\right).\left(\frac{dq}{dz'}\right) + \left(\frac{dn}{dr}\right).\left(\frac{dr}{dz'}\right)$$
$$+\left(\frac{dn}{dc}\right) = \left(\frac{dm}{dp}\right).\left[\left(\frac{dq}{dz'}\right) - \frac{q}{r}.\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right] + \left(\frac{dn}{dc}\right)$$
$$\left(\frac{dm}{dz'}\right) = \left(\frac{dm}{dp}\right).\left(\frac{dp}{dz'}\right) + \left(\frac{dm}{dr}\right).\left(\frac{dr}{dz'}\right)$$
$$+\left(\frac{dm}{dc}\right) = \left(\frac{dm}{dp}\right).\left[\left(\frac{dp}{dz'}\right) - \frac{p}{r}.\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right] + \left(\frac{dm}{dc}\right)$$
$$\left(\frac{dm}{dy'}\right) = \left(\frac{dm}{dp}\right).\left(\frac{dp}{dy'}\right) + \left(\frac{dm}{dr}\right).\left(\frac{dr}{dy'}\right)$$
$$+\left(\frac{dm}{db}\right) = \left(\frac{dm}{dp}\right).\left[\left(\frac{dp}{dy'}\right) - \frac{p}{r}.\left(\frac{dr}{dy'}\right)\right] + \left(\frac{dm}{db}\right)$$

en sorte que l'équation (H′) se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l} r.\left(\frac{dq}{dx'}\right) - q.\left(\frac{dr}{dx'}\right) + p.\left(\frac{dr}{dy'}\right) \\ -\,r.\left(\frac{dp}{dy'}\right) + q.\left(\frac{dp}{dz'}\right) - p.\left(\frac{dq}{dz'}\right) \end{array}\right\}.\left(\frac{dm}{dp}\right) = 0$$

équation qui est évidemment satisfaite, puisque $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$ est la différentielle de l'équation $F.\,(x'y'z' = 0$.

Considérons actuellement un faisceau de lumière compris entre quatre des surfaces coniques (C) (C) (C′) (C′) infiniment proches l'une de l'autre, ce faisceau aura la forme d'une pyramide quadrangulaire obliquangle comprenant entre ses arêtes deux petits angles ii', et entre ses faces deux angles θ $180° - \theta$; lorsque ces rayons seront réfractés, ils seront compris dans un solide quadrangulaire rectangle renfermant entre ses arêtes deux nouveaux angles kk'.

Soit Δ la distance $[(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2]^{\frac{1}{2}}$ du point lumineux XYZ au point $x'y'z'$ de la surface.

D la distance du point $x'y'z'$ à l'œil situé dans le prolongement du rayon réfracté.

La lumière qui parvient à l'œil après avoir été réfractée, a parcouru depuis le point lumineux un espace exprimé par $\Delta + D$, et à cette distance le faisceau de rayons parti du point lumineux auroit pour section perpendiculaire à son axe un quadrilatère obliquangle $(\Delta + D)^2 . ii' . \sin. \theta$; mais ce faisceau, au point où se trouve l'œil, a pour section perpendiculaire à son axe le quadrilatère rectangle $(D \pm R) . (D \pm R) kk'$. Or, comme l'intensité de la lumière est en raison inverse des surfaces sur lesquelles la même quantité de rayons est dispersée, elle se trouvera au lieu où est situé l'œil après la réfraction, relativement à ce qu'elle eût été à la distance $(\Delta + D)$, en partant directement du point lumineux dans le rapport de $(\Delta + D) ii' . \sin. \theta$ à $(D \pm R) . (D \pm R') kk'$. On pourra donc exprimer l'in-

tensité de la clarté du point XYZ, vu sur le point $x'y'z'$ de la surface, par

$$T = e.\ \frac{(\Delta + D)^2\ ii'.\ sin.\ \theta}{(D \pm R).\ (D \pm R')\ kk'}$$

e étant un coefficient constant qui dépend de la clarté absolue du point lumineux.

Il ne reste plus qu'à déterminer l'expression du rapport $\frac{ii'.\ sin.\ \theta}{kk'}$. Nous avons vu [10] que

$$\frac{i^2}{k^2} = \frac{(m^2 + n^2 - o^2)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.\ \frac{(ndx' - mdy')^2}{(ndm - mdn)^2}.$$
$$\left[\frac{(a^2 + b^2 + c^2).\ (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - (adx' + bdy' + cdz')^2}{(m^2 + n^2 + o^2).\ (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - (mdx' + ndy' + odz')^2}\right]$$

et par conséquent

$$\frac{ii'}{kk'} = \frac{RR'}{\Delta^2}.\ \frac{(m^2 + n^2 + o^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)}.$$
$$\left[\frac{(a^2 + b^2 + c^2).\ (M^2 + N^2 + O^2) - (aM + bN + cO)^2}{(m^2 + n^2 + o^2).\ (M^2 + N^2 + O^2) - (mM + nN + oO)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\left[\frac{(a^2 + b^2 + c^2).\ (M'^2 + N'^2 + O'^2) - (aM' + bN' + cO')^2}{(m^2 + n^2 + o^2).\ (M'^2 + N'^2 + O'^2) - (mM' + nN' + oO')^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Quant à l'angle θ compris entre le plan tangent à la surface (C),

$$(bO - cN).\ (x - x') + (cM - aO).\ (y - y') + (aN - bM).\ (z - z') = o$$

et le plan tangent à la surface (C'),

$$(bO' - cN').\ (x - x') + (cM' - aO').\ (y - y') + (aN' - bM').\ (z - z') = o$$

on a

$$\sin.\theta = \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}.\,[a.\,(N'O-NO')+b.\,(MO'-M'O)+c.\,(M'N-MN')]}{[(a^2+b^2+c^2).(M^2+N^2+O^2)-(aM+bN+cO)]^{\frac{1}{2}}.\,[(a^2+b^2+c^2).(M'^2+N'^2+O'^2)-(aM'+bN'+cO')]^{\frac{1}{2}}}$$

en sorte que

$$T = e.\,\frac{(\Delta+D^2)\,ii'.\,\sin.\theta}{(D\pm R).(D\pm R')\,kk'} = e.\,\frac{(\Delta+D)^2}{(D\pm R).(D\pm R')}.\,\frac{RR'}{\Delta^2}.\,\frac{(m^2+n^2+o^2)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\times\,\frac{[a.\,(N'O-NO')+b.\,(MO'-M'O)+c\,(M'N-MN')]}{[(m^2+n^2+o^2).(M^2+N^2+O^2)-(mM+uN+oO)]^{\frac{1}{2}}.\,[(m^2+n^2+o^2).(M'^2+N'^2+O'^2)-(mM'+nN'+oO')]^{\frac{1}{2}}}$$

On voit qu'abstraction faite du coefficient de

$$e.\,\frac{(\Delta+D)^2}{(D\pm R).(D\pm R')}$$

l'intensité T de la lumière réfractée sera d'autant plus forte que $D\pm R$, $D\pm R'$ seront plus petits; en sorte que le *maximum* d'intensité de lumière aura lieu pour les points où $D\pm R=0$, $D\pm R'=0$. Or $D\pm R=0$ est l'équation de la surface caustique (Σ), et $D\pm R'=0$ est celle de la surface caustique (Σ'). C'est donc à l'intersection de ces surfaces que se trouve le *maximum* de lumière réfractée. Quand le lieu de cette intersection se réduit à un ou plusieurs points, on les nomme foyers des rayons réfractés.

[17] Il y a une certaine famille de surfaces courbes pour lesquelles $\sin.\theta=1$, c'est-à-dire pour lesquelles les surfaces coniques (CC) $(C'C')$ se coupent à angle droit comme les surfaces (SS) $(S'S')$, et on a leur équation aux différences partielles en égalant à l'unité la valeur de $\sin.\theta$; ce qui donne

$$(a^2+b^2+c^2).(MM'+NN'+OO')-(aM+bN+cO).(aM'+bN'+cO)=0$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}
\left[o.\left(\frac{dn}{dx'}\right)-n.\left(\frac{do}{dx'}\right)\right] \\
\left[a^2.\,(q^2+r^2)+(bq+cr)^2\right] \\
+\left[o.\left(\frac{dm}{dx'}\right)+n.\left(\frac{do}{dy'}\right)-m.\left(\frac{do}{dx'}\right)-o.\left(\frac{dn}{dy'}\right)\right] \\
\left[(a^2+b^2)\,pq+cr.\,(aq+br)-abr^2\right] \\
+\left[m.\left(\frac{do}{dy'}\right)-o.\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right] \\
\left[b^2.\,(p^2+r^2)+(ap+cr)^2\right] \\
+\left[m.\left(\frac{dn}{dx'}\right)+n.\left(\frac{do}{dz'}\right)-n.\left(\frac{dm}{dx'}\right)-o.\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right] \\
\left[(a^2+c^2)\,pr+bq.\,(ar+cp)-acq^2\right] \\
+\left[n.\left(\frac{dm}{dz'}\right)-m.\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right] \\
\left[c^2.\,(p^2+q^2)+(ap+bq)^2\right] \\
+\left[m.\left(\frac{dn}{dy'}\right)+o.\left(\frac{dm}{dz'}\right)-n.\left(\frac{dm}{dy'}\right)-m.\left(\frac{do}{dz'}\right)\right] \\
\left[(b^2+c^2)\,qr+ap.\,(br+cq)-bcp^2\right]
\end{array}\right\}=0.\ (K)$$

équation aux différences partielles du second ordre, dont l'intégrale est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations.

$$\left.\begin{array}{l}
(x-X)\,\alpha+(y-Y)\,\varphi.\,\alpha+(z-Z) \\
+(1+\alpha^2+\varphi^2.\,\alpha)^{\frac{1}{2}}\psi.\,[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2]
\end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}
[(x-X)+(y-Y)\,\varphi'\alpha]\,(1+\alpha^2+\varphi^2.\,\alpha]^{\frac{1}{2}} \\
+(\alpha+\varphi'\alpha.\,\varphi\alpha)\,\psi.\,[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2]
\end{array}\right\}=0$$

S(K)

Si on conçoit une surface de révolution quelconque suspendue par un point fixe de son axe, et que cette

surface vienne à osciller d'une manière quelconque autour de ce point, la surface qui enveloppera toutes ses positions sera la surface S(K). Sur cette surface les lignes de courbure se confondent avec les lignes de réflexion et de réfraction; par conséquent les normales, les rayons réfléchis et les rayons réfractés sont tangens à une même surface conique qui a son centre au point XYZ, et qui est à la fois surface des centres de courbure, surface caustique de réflexion et surface caustique de réfraction. Cette équation appartient en général à toutes les surfaces qui ont pour une de leurs caustiques une surface conique quelconque.

Lorsque le point lumineux est situé à l'infini, ses rayons incidens sont parallèles et abc sont constans. Alors l'intégrale de l'équation (K) est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2 c^2 + (y-\varphi.\alpha)^2 c^2 \\ + (a\alpha + b\varphi.\alpha + cz)^2 = \psi.(ax+by+cz) \\ (x-\alpha)\, c^2 + (y-\varphi.\alpha)\, c^2\varphi'\alpha \\ - (a + b\varphi'\alpha).(a\alpha + b\varphi.\alpha + cz) = 0\end{array}\right\} \quad S(K')$$

Si on conçoit une surface de révolution quelconque dont l'axe se meuve parallèlement à lui-même, en sorte que chacun des cercles générateurs reste dans un même plan, la surface qui enveloppera toutes ses positions sera la surface S(K'); les normales, les rayons réfléchis ou réfractés sont tangens à une même surface cylindrique dont les arêtes sont parallèles aux rayons incidens.

[18] Supposons actuellement que le rayon lumineux

$$\frac{x-X}{a}=\frac{y-Y}{b}=\frac{z-Z}{c}=\frac{u}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (a)$$

après avoir été réfracté en pénétrant le premier milieu au point $x'y'z'$ de la surface

$$F.(x'y'z')=0\,;\quad p\,dx'+q\,dy'+r\,dz'=0 \qquad (F)$$

et, après avoir été dirigé suivant la ligne

$$\frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=\frac{z-z'}{o}=\frac{u'}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (A)$$

rencontre un second milieu en un point $x_{,}y_{,}z_{,}$ de sa surface

$$F_{,}(x_{,}y_{,}z_{,})=0\,;\quad p_{,}dx_{,}+q_{,}dy_{,}+r_{,}dz_{,}=0 \qquad (F_{,})$$

il sera réfracté suivant une nouvelle ligne.

$$\frac{x-x_{,}}{m_{,}}=\frac{y-y_{,}}{n_{,}}=\frac{z-z_{,}}{o_{,}}=\frac{u_{,}}{(m_{,}^2+n_{,}^2+o_{,}^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (A_{,})$$

Le rayon (A), dans ce second cas, est considéré comme rayon incident; en sorte qu'on aura $m_{,}n_{,}o_{,}$ en changeant, dans les expressions de mno [15], mno en $m_{,}n_{,}o_{,}$, abc en mno et l en $l_{,}$, en nommant $l_{,}$ le rapport constant $\frac{du_{,}}{du'}$ du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour les rayons réfractés sur la surface $(F_{,})$; ce qui donne

$$m_{,} = \lambda.\left\{\begin{array}{l} p_{,}r_{,}l_{,}^{2}.(m^{2}+n^{2}+o^{2}) + (oq_{,}-nr_{,}).(np_{,}-mq_{,}) \\ +(mr_{,}-op_{,}).[(p_{,}^{2}+q_{,}^{2}+r_{,}^{2}).(m^{2}+n^{2}+o^{2}).(l_{,}^{2}-1)+(mp_{,}+nq_{,}+or_{,})^{2}]^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

$$n_{,} = \lambda.\left\{\begin{array}{l} q_{,}r_{,}l_{,}^{2}.(m^{2}+n^{2}+o^{2}) + (mr_{,}-op_{,}).(np_{,}-mq_{,}) \\ +(nr_{,}-oq_{,}).[(p_{,}^{2}+q_{,}^{2}+r_{,}^{2}).(m^{2}+n^{2}+o^{2}).(l_{,}^{2}-1)+(mp_{,}+nq_{,}+or_{,})^{2}]^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

$$o_{,} = \lambda.\left\{l^{2}r_{,}^{2}.(m^{2}+n^{2}+o^{2}) - (oq_{,}-nr_{,})^{2} - (mr_{,}-op_{,})^{2}\right\}$$

Enfin, comme le point $x_{,}y_{,}z_{,}$ est commun au rayon (A) et à la surface $(F_{,})$, on a

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o}$$

Cette équation, jointe à celle $F.(x'y'z') = 0$, pourra servir à déterminer $x'y'z'$ en fonction de $x_{,}y_{,}z_{,}$; en sorte que $m_{,}n_{,}o_{,}$ seront donnés en fonction des coordonnées XYZ du point lumineux, de celles $x_{,}y_{,}z_{,}$ du point où se fait la seconde réfraction et des quantité $l l_{,}$.

Les résultats des paragraphes [12] [13] [14] sont les mêmes pour les rayons réfléchis et pour les rayons réfractés, et nous nous dispenserons de les répéter. Ils offrent, comme dans la catoptrique, les moyens de déterminer l'intensité de la lumière et la forme apparente des images, après un nombre quelconque de réfractions. Nous aurons occasion de développer ces résultats dans les applications que nous ferons de cette théorie.

[19] Nous avons démontré [15] que lorsqu'un rayon est réfracté sur la surface (F) d'un corps diaphane, le carré de la vitesse de la lumière est augmenté d'une quantité constante $\frac{dC^{2}}{dt^{2}} = \frac{du'^{2}-du^{2}}{dt^{2}}$. On prouve de la même manière qu'après une seconde réfraction le carré

de la vitesse de la lumière est augmenté d'une quantité $\frac{dC_{,}^{2}}{dt^{2}} = \frac{du_{,}^{2} - du'^{2}}{dt^{2}}$; en sorte que l'accroissement du carré de la vitesse est

Après la première réfraction .... $\frac{dC^{2}}{dt^{2}} = \frac{du'^{2} - du^{2}}{dt^{2}}$

Après la seconde réfraction ..... $\frac{dC_{,}^{2}}{dt^{2}} = \frac{du_{,}^{2} - du'^{2}}{dt^{2}}$

Après la troisième réfraction .... $\frac{dC_{,,}^{2}}{dt^{2}} = \frac{du_{,,}^{2} - du_{,}^{2}}{dt^{2}}$

Après la $n+1^{\text{eme}}$ réfraction ..... $\frac{dC_{n}^{2}}{dt^{2}} = \frac{du_{n}^{2} - du_{n-1}^{2}}{dt^{2}}$

et l'augmentation totale

$$\frac{dC^{2} + dC_{,}^{2} + dC_{,,}^{2} + \ldots\ldots dC_{n}^{2}}{dt^{2}} = \frac{du_{n}^{2} - du^{2}}{dt^{2}}$$

c'est-à-dire la même que si le corps avoit pénétré immédiatement dans le $n+1^{\text{ème}}$ milieu sans passer par les milieux intermédiaires; de manière que si les surfaces proposées sont une suite de plans parallèles, la direction d'un rayon quelconque sera, après avoir pénétré les divers milieux, parallèle à celle qu'il auroit eue s'il eût été réfracté seulement par le dernier milieu.

Il faut observer que le signe des quantités dC^{2}, $dC_{,}^{2}$, etc. peut être positif ou négatif, selon que la vitesse de la lumière est augmentée ou retardée en passant d'un milieu dans un autre.

En effet, nous avons supposé que le rayon incident (a) pénétroit un milieu plus réfringent que celui d'où il sortoit, et étoit soumis aux approches de la sur-

face qui sépare ces milieux, à une force accélératrice ϖ qui tendoit à augmenter sa vitesse : mais si le milieu dans lequel le rayon doit pénétrer est moins réfringent que celui dans lequel il se meut primitivement, la force ϖ tend évidemment à diminuer la vitesse de la lumière; en sorte que la différentielle de cette vitesse est négative : ce qu'on exprime en regardant ϖ comme négatif. En sorte que

$$\frac{d^2x}{p\,dt^2} = \frac{d^2y}{q\,dt^2} = \frac{d^2z}{r\,dt^2} = -\frac{\varpi}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (\alpha)$$

On tire de cette équation, comme nous l'avons vu [15],

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} - 2\int\varpi\,\frac{p\,dx+q\,dy+r\,dz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et enfin

$$\frac{du'^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} - \frac{dC^2}{dt^2}$$

en représentant par $\frac{dC^2}{dt^2}$ l'intégrale $2\int\varpi\,\frac{p\,dx+q\,dy+r\,dz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$ prise dans les limites de l'influence de la force ϖ. $\frac{du}{dt}$ est la vitesse de la lumière lorsqu'elle se meut dans le rayon incident (a); $\frac{du'}{dt}$ sa vitesse lorsqu'elle se meut dans le rayon réfracté (A), et on voit que le carré de la vitesse de la lumière est diminué d'une quantité constante $\frac{dC^2}{dt^2}$ indépendante des quantités $a\,b\,c$; en sorte que les vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$, et leur rapport $\frac{du'}{du}$ sont in-

dépendans de l'inclinaison du rayon incident. Tous les autres résultats que nous avons obtenus en regardant ϖ comme positif, ont lieu lorsqu'il est négatif. Cependant, comme $du' < du$ et $\frac{du'}{du} = l < 1$, il y a dans ce dernier cas une circonstance qui le distingue du précédent, et qui change entre certaines limites la nature des phénomènes.

On tire de l'équation (α)

$$p.\frac{d^2x}{dt^2} + q.\frac{d^2y}{dt^2} + r.\frac{d^2z}{dt^2} = -\varpi(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si on multiplie les deux membres par $\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)}$, et si on intègre, on aura

$$\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)} = \beta - 2\int\varpi\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Nous observerons, comme nous l'avons fait précédemment, que, tant que la lumière se meut en ligne droite dans le rayon incident, elle n'est pas soumise à l'action de la force ϖ. Or, prenant les valeurs de dx, dy, dz dans l'équation (a), et faisant $\varpi = 0$, on aura

$$\frac{du^2.(ap+bq+cr)^2}{dt^2.(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2)} = \beta$$

Donc

$$\left.\begin{aligned}\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)} &= \frac{du^2}{dt^2}.\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2)}\\ &\quad - 2\int\varpi\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\right\}(\beta)$$

$\frac{(pdx + qdy + rdz)^2}{dt^2 . (p^2 + q^2 + r^2)}$, qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \cdot \frac{(pdx + qdy + rdz)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2) . (p^2 + q^2 + r^2)}$$

exprime le carré de la vitesse de la lumière multiplié par le carré du cosinus de sa direction avec la normale, et $\frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2) . (p^2 + q^2 + r^2)}$, exprime le carré du cosinus de l'angle d'incidence.

Enfin, lorsque la molécule de lumière est dans le rayon réfracté (A), on aura, en prenant les valeurs de dx, dy, dz dans l'équation (A), et en substituant à l'intégrale $2\int\varpi \frac{pdx + qdy + rdz}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$ sa valeur totale $\frac{dC^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} - \frac{du'^2}{dt}$,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du'^2}{dt^2} \cdot \frac{(mp + nq + or)^2}{(m^2 + n^2 + o^2) . (p^2 + q^2 + r^2)} \\ = &\frac{du^2}{dt^2} \cdot \frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2) . (p^2 + q^2 + r^2)} \\ - &\frac{du^2}{dt^2} + \frac{du'^2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

On peut tirer directement de cette équation la condition

$$\left[\frac{(cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2}{(oq - nr)^2 + (mr - op)^2 + (np - mq)^2}\right] \cdot \frac{(m^2 + n^2 + o^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{du'^2}{du^2}$$

qui exprime que le sinus d'incidence et le sinus de réfraction sont dans un rapport constant $\frac{du'}{du} = l$; mais comme $l < 1$, et comme la plus grande valeur du sinus

de réfraction est 1, la plus grande valeur du sinus d'incidence sera $\frac{du'}{du} < 1$. Au-delà de cette limite l'équation (γ) ne pourra plus avoir lieu; et en effet alors les rayons ne sont plus réfractés, mais réfléchis; ce que nous allons déduire de l'analyse précédente.

L'équation

$$\frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2).(p^2 + q^2 + r^2)} = 1 - \frac{du'^2}{du^2}$$

qui indique la moindre valeur du cosinus d'incidence pour laquelle la réfraction puisse avoir lieu, étant jointe à l'équation $F.(x'y'z') = 0$ (F), indiquera sur la surface (F) la courbe par laquelle passeront les derniers rayons réfractés; enfin si, entre ces équations et celles du rayon réfracté

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{o} = \frac{u}{(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (A)$$

on élimine $x'y'z'$, on aura en xyz l'équation d'une surface gauche qui enveloppera tous les rayons réfractés et donnera la limite des lieux de l'espace pour lesquels le point lumineux XYZ est visible au-delà de la surface (F).

Depuis

$$\frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2).(p^2 + q^2 + c^2)} = 1 - \frac{du'^2}{du^2}$$

jusqu'à

$$\frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2).(p^2 + q^2 + r^2)} = 0$$

la valeur de $\frac{du'^2}{dt^2}\cdot\frac{(mp+nq+or)^2}{(m^2+n^2+o^2).(p^2+q^2+r)}$ est négative, et sa racine imaginaire, parce que le second membre de l'équation (γ) est négatif; mais comme avant que la lumière ait éprouvé l'influence de la force ϖ, on avoit

$$\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)}=\beta=\frac{du^2}{dt^2}\cdot\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2)}$$

La quantité $\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)}$ ne peut être devenue négative sans avoir été nulle, et par conséquent il faut que dans les limites de l'influence de la force ϖ on ait eu pour un certain point

$$\left.\begin{aligned}\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)}=\frac{du^2}{dt^2}\cdot\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2)}\\-2\int\varpi\,\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\right\}=0$$

Il est évident qu'à partir de ce point la vitesse $\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)}$ commence à croître, mais en sens contraire, et que l'intégrale doit être prise depuis

$$\frac{du^2}{dt^2}\cdot\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2)}-2\int\varpi\,\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0$$

jusqu'à

$$2\int\varpi\,\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0$$

en sorte qu'on aura, quand la molécule de lumière aura cessé d'être soumise à l'action de la force ϖ,

$$\frac{(pdx+qdy+rdz)^2}{dt^2.(p^2+q^2+r^2)}=\frac{du^2}{dt^2}\cdot\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2}$$

et par conséquent, en mettant pour dx, dy, dz leurs valeurs prises dans l'équation (A),

$$du'^2 \frac{(mp + nq + or)^2}{(m^2 + n^2 + o^2)} = du^2 \frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

D'un autre côté, l'intégrale $2 \int \varpi \frac{pdx + qdy + rdz}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$ étant prise depuis o jusqu'à $\frac{du^2}{dt^2} \cdot \frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (p^2 + q^2 + r^2)}$ et depuis cette limite jusqu'à o, on aura

$$2 \int \varpi \frac{pdx + qdy + rdz}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dC^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} - \frac{du'^2}{dt^2} = o$$

$$\frac{du'}{du} = 1$$

et enfin

$$\frac{(mp + nq + or)^2}{(m^2 + n^2 + o^2)} = \frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

équation qui, comme nous l'avons vu dans la catoptrique, exprime que le rayon (A) forme avec la normale un angle égal à celui d'incidence; et comme on a toujours, d'après l'équation (α),

$$q \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - r \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = o$$

$$r \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - p \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = o$$

$$p \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - q \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = o$$

ce qui indique que la vitesse décomposée parallèlement à la surface, demeure constante. Il s'ensuit que le rayon (A) est réfléchi, et que l'angle qu'il forme avec

la normale doit être compté dans lesens opposé au rayon incident.

[20] On doit conclure de ce que nous venons d'exposer, que la molécule de lumière décrit, en s'éloignant de la surface (F), une courbe absolument semblable à celle qu'elle a décrit en s'en approchant, et le sommet de cette courbe se trouve au point déterminé par l'équation

$$\frac{du^2}{dt^2}\cdot\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2).(p^2+q^2+r^2)}-2\int\varpi\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}=0\quad(\delta)$$

Or ce point peut se trouver en deçà ou au-delà de la surface qui sépare les deux milieux. Dans le premier cas le rayon ne sort pas du premier milieu; dans le second cas, il pénètre le second milieu jusqu'à une distance insensible.

La plus grande valeur de $2\int\varpi\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$ est $\frac{dC^2}{dt^2}=\frac{du^2}{dt^2}-\frac{du'^2}{dt^2}$, et sa moindre valeur est 0; en sorte qu'on aura en général pour tous les points de la trajectoire courbe de la lumière:

$$2\int\varpi\frac{pdx+qdy+rdz}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}=\gamma.\left(\frac{du^2}{dt^2}-\frac{du'^2}{dt^2}\right)$$

γ étant un nombre compris entre 0 et l'unité, et $\frac{du'}{dt}$ étant la vitesse constante de la lumière dans le rayon réfracté. Je fais cette dernière observation pour distinguer cette expression $\frac{du'}{dt}$ de la valeur particulière

$\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt}$ que nous venons d'obtenir plus haut, et qui est la vitesse de la lumière lorsqu'elle est réfléchie.

Lorsque la molécule de lumière est à une distance d en avant de la surface qui sépare les deux milieux, elle est soumise de part et d'autre de sa position à l'action de deux couches du premier milieu, ayant chacune une épaisseur d, et dont les forces sont en équilibre; elle est donc soumise à la même force que si elle étoit à la distance d des deux milieux situés de côtés opposés. De même, lorsqu'elle a pénétré le second milieu jusqu'à la la distance d, elle est encore soumise à la même force que si elle étoit à la distance d des deux milieux situés de côtés opposés. Donc lorsqu'elle est parvenue entre ces deux points, c'est-à-dire sur la surface qui sépare les milieux, elle a éprouvé exactement la moitié de l'influence totale de la force ϖ, et on a sur cette surface $\gamma = \frac{1}{2}$; par conséquent, tant que dans l'équation

$$\frac{(ap + bq + cr)^2}{(a^2 + b^2 + c^2).(p^2 + q^2 + r^2)} = \gamma.\left(1 - \frac{du'^2}{du^2}\right)$$

γ sera compris entre 1 et $\frac{1}{2}$, le sommet de la courbe déterminé par l'équation (δ) sera au-delà de la surface, et le rayon, avant de se réfléchir, aura pénétré le second milieu. Lorsque $\gamma = \frac{1}{2}$, le rayon sera réfléchi sur la surface même de séparation, et lorsque γ sera compris entre $\frac{1}{2}$ et 0, le rayon sera réfléchi avant d'avoir atteint la surface de séparation.

Lorsqu'on connoît la force réfractive du premier mi-

lieu, on peut en déduire celle du second, en observant l'angle dont le cosinus égale $\frac{ap + bq + cr}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} (p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$ sous lequel commence la réflexion. En effet, en nommant l le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, lorsque la lumière pénètre dans le premier milieu; l' le rapport cherché du sinus d'incidence au sinus de réfraction, lorsqu'elle pénètre immédiatement dans le second milieu, on aura $\frac{du'}{du} = \frac{l'}{l}$. Or, si les deux milieux sont diaphanes, la réflexion commence lorsque $\gamma = 1$.

Soit ε le cosinus de l'angle observé sous lequel commence la réflexion, on aura

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{du'^2}{du^2} = 1 - \frac{l'^2}{l^2}$$

et par conséquent

$$l'^2 = l^2 . (1 - \varepsilon^2)$$

Lorsque le second milieu est opaque il faut observer que, puisqu'il absorbe la lumière, la réflexion ne peut avoir lieu que dans le premier milieu diaphane; en sorte que la plus grande valeur de γ est $\frac{1}{2}$. Ainsi ε' étant le cosinus de l'angle observé lorsque la réflexion commence,

$$\varepsilon'^2 = \tfrac{1}{2} . \left(1 - \frac{du'^2}{du^2}\right) = \tfrac{1}{2} . \left(1 - \frac{l'^2}{l^2}\right)$$

et par conséquent

$$l'^2 = l^2 . (1 - 2\,\varepsilon'^2)$$

Comme la force réfractive est $l'^2 - 1$, cette quantité sera déterminée et comparable avec des quantités de même nature. Cette expérience suppose $l' < l$; dans le cas contraire, il ne sera pas possible de déterminer par ce moyen la force réfractive du corps proposé.

Les quantités $l^2 - 1$, $l'^2 - 1$ représentent l'action des corps sur la lumière, et par conséquent leur force relative. Si, comme l'expérience semble l'indiquer, cette force dans un même corps est proportionnelle à sa densité, on aura les forces réfractives absolues en divisant les quantités $l^2 - 1$, $l'^2 - 1$ par les densités δ, δ' de ces corps.

[21] Nous avons jusqu'ici supposé que le rayon de lumière pénétroit des corps homogènes terminés par des surfaces courbes, et étoit réfracté par chacune de ces surfaces suivant une ligne droite; mais s'il pénètre un milieu non homogène composé de couches infiniment proches dont la force réfractive Π soit différente, il décrira nécessairement une ligne courbe dont nous allons déterminer les équations.

Soit

$$\Pi = F.(xyz); \quad d\Pi = p\,dx + q\,dy + r\,dz \qquad (\pi)$$

l'équation du milieu proposé, Π étant l'expression variable de la force réfractive de chaque couche et $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$ l'équation des couches pour lesquelles la force réfractive est la même. Supposons de plus, comme l'expérience semble le confirmer, que l'ac-

tion de cette force ne s'exerce qu'à une distance infiniment petite.

La force qui agit sur la molécule lumineuse, et que nous avons représentée par ϖ [15], sera égale à $\frac{d\Pi}{2}$ divisé par l'épaisseur de la couche $\frac{pdx + qdy + rdz}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$, et on aura par conséquent

$$\frac{d^2x}{pdt^2} = \frac{d^2y}{qdt^2} = \frac{d^2z}{rdt^2} = \frac{\varpi}{(p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{d\Pi}{2\,(pdx + qdy + rdz)}$$

équation qui donne

$$dx.\frac{d^2x}{dt^2} + dy.\frac{d^2y}{dt^2} + dz.\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\Pi}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 + \Pi \qquad f(1)$$

v étant la vitesse initiale de la lumière.

On a en outre

$$pd^2y - qd^2x = 0\,;\quad rd^2x - pd^2z = 0\,;\quad qd^2z - rd^2y = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} pdy - qdx &= fdt + fdpdy - dqdx \\ rdx - pdz &= f'dt + fdrdx - dpdz \\ qdz - rdy &= f''dt + fdqdz - drdy \end{aligned} \qquad f(2)$$

Ces équations contiennent toutes les données relatives au mouvement de la lumière.

Les équations (1), $f(1)$ indiquent que le carré de l'accroissement de la vitesse de la lumière est égal à la force réfractive de la dernière couche, quels que soient les milieux intermédiaires; ce que nous avons déjà observé.

Les équations (2), $\int(2)$ indiquent que le plan osculateur de la courbe est perpendiculaire au plan tangent à la surface $pdx + qdy + rdz = 0$.

En effet, si les coordonnées $x'y'z'$ sont les coordonnées générales de ces plans, l'équation du plan tangent à la surface $pdx + qdy + rdz = 0$ étant

$$p.(x - x') + q.(y - y') + r.(z - z') = 0$$

et l'équation du plan osculateur à la trajectoire décrite par la lumière étant

$$\left.\begin{array}{r} (dzd^2y - dyd^2z).(x - x') \\ + (dxd^2z - dzd^2x).(y - y') \\ + (dyd^2x - dxd^2y).(z - z') \end{array}\right\} = 0$$

la condition pour que ces plans soient perpendiculaires sera

$$p.(dzd^2y - dyd^2z) + q.(dxd^2z - dzd^2x) + r.(dyd^2x - dxd^2y) = 0 \quad (3)$$

condition qui sera toujours remplie par les équations (2), puisqu'elle peut être mise sous la forme

$$\frac{pd^2y - qd^2x}{pdy - qdx} = \frac{rd^2x - pd^2z}{rdx - pdz} = \frac{qd^2z - rd^2y}{qdz - rdy} = 0$$

On voit alors que ses intégrales premières seront, en nommant e le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1,

$$\frac{pdy - qdx}{fe.\int\frac{dpdy - dqdx}{pdy - qdx}} = \frac{rdx - pdz}{f'e.\int\frac{drdx - dpdz}{rdx - pdz}} = \frac{qdz - rdy}{f''e.\int\frac{dqdz - drdy}{qdz - rdy}} = dt.\int(3)$$

équations équivalentes aux équations $\int(2)$, et qui, par

l'élimination de dx, dy, dz, donnent

$$\left.\begin{aligned} & pf''e.\int\frac{dqdz-drdy}{qdz-rdy} \\ +\ & qf'e.\int\frac{drdx-dpdz}{pdx-pdz} \\ +\ & rfe.\int\frac{dpdy-dqdx}{pdy-qdx} \end{aligned}\right\} = 0 \qquad ff(3)$$

Les résultats précédens se simplifient lorsqu'on a en général

$$\begin{aligned} dpdy - dqdx &= 0 \\ drdx - dpdz &= 0 \\ dqdz - drdy &= 0 \end{aligned}$$

parce qu'alors les exposans de e se réduisent à zéro dans toute l'étendue de l'intégrale. Or ce cas ne peut avoir lieu que de deux manières : 1°. si pqr sont constans ; 2°. si on a $p\delta = x - \alpha$, $q\delta = y - \beta$, $r\delta = z - \gamma$, $\alpha\beta\gamma\delta$ étant des quantités constantes.

[22] 1°. Si pqr sont constans, l'équation $pdx + qdy + rdz = 0$ est celle d'un plan, et par conséquent les couches de même force réfractive sont une suite de plans parallèles

$$px + qy + rz = \Phi\Pi \qquad (\Pi)$$

la fonction Φ dépendant de la loi de la variation des forces d'une couche à l'autre.

Les équations $f(3)$ deviennent

$$\frac{pdy-qdx}{f} = \frac{rdx-pdz}{f'} = \frac{qdz-rdy}{f''} = dt$$

Or, lorsque la molécule lumineuse est encore comprise dans le rayon incident

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-X}{a} &= \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c} = \frac{u}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dx}{a} &= \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = \frac{du}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

on a

$$\frac{bp-aq}{f} = \frac{ar-cp}{f'} = \frac{cq-br}{f''} = dt\,\frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{du}$$

ce qui détermine les constantes f, f', f''; en sorte qu'on obtient enfin

$$\frac{pdy-qdx}{bp-aq} = \frac{rdx-pdz}{ar-cp} = \frac{qdz-rdy}{cq-br} = \frac{du}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \int(3)$$

équation dont l'intégrale est

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p.(y-y')-q.(x-x')}{bp-aq} \\ =\ &\frac{r.(x-x')-p.(z-z')}{ar-cp} \\ =\ &\frac{q.(z-z')-r.(y-y')}{cq-br} \\ =\ &\frac{u}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \iint(3)$$

on tire de cette équation

$$(x-x').(cq-br)+(y-y').(ar-cp)+(z-z').(bp-aq)=0$$

équation d'un plan qui contient la trajectoire lumineuse, et qui est perpendiculaire aux couches (Π).

Si abc sont constans, c'est-à-dire si les rayons lumi-

neux sont parallèles, toutes les trajectoires sont situées dans des plans parallèles, et il est évident qu'elles forment un faisceau de courbes semblables; mais si les rayons partent d'un point ZYZ, on aura, en substituant pour abc leurs valeurs prises dans l'équation (a) au point $x'y'z'$, on commence l'intégrale

$$\left.\begin{array}{l}(x-x').[(Z-z').q-(Y-y')r]\\ +(y-y').[(X-x').r-(Z-z')p]\\ +(z-z').[(Y-y').p-(X-x')q]\end{array}\right\}=0 \quad (4)$$

équation d'un système de plans qui passent par le point XYZ et par une même ligne

$$\frac{x-X}{p}=\frac{y-Y}{q}=\frac{z-Z}{r} \qquad (X)$$

perpendiculaire au système de couches réfringentes (Π). On a d'un autre côté, d'après l'équation $f(3)$,

$$(pdy-qdx)^2+(rdx-pdz)^2+(qdz-rdy)^2$$
$$=\left[\frac{(bp-aq)^2+ar-cp)^2+(cq-br)^2}{(a^2+b^2+c^2)}\right]du^2$$

ou

$$(p^2+q^2+r^2).(dx^2+dy^2+dz^2)$$
$$-(pdy+qdy+rdz)^2$$
$$=\left\{\begin{array}{l}(p^2+q^2+r^2).\\ (a^2+b^2+c^2)\\ -(ap+bq+cr)^2\end{array}\right\}\frac{du^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Or, lorsque la molécule de lumière est encore comprise dans le rayon incident, on aura, d'après les équations

(a) $f(1)$, en nommant Π' la force réfractive du milieu dans laquelle se trouve

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} = v^2 + \Pi'.$$

Lorsqu'elle aura pénétré dans le corps jusqu'à la couche dont la force réfractive Π, on aura

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 + \Pi$$

On a aussi, à cause de $px + qy + rz = \Phi\Pi$,

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz = \Phi'.\ \Pi.\ d\Pi$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente déduite de l'équation $f(3)$, elle devient

$$\left[(p^2+q^2+r^2).(\Pi-\Pi') + (v^2+\Pi').\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\Phi'.\ \Pi.\ d\Pi}{dt} = \frac{\Phi'.\ \Pi.\ (v^2+\Pi)^{\frac{1}{2}}\ d\Pi}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ce qui donne, soit une relation Π et le temps t, soit une relation entre Π et l'arc de courbe parcouru par la lumière. Il faut remarquer que cette équation contient la constante arbitraire $\frac{(ap+bq+cr)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$, et que le résultat sera toujours le même, pourvu que le point $x'y'z'$ où commence l'intégrale soit assujéti à la condition

$$\frac{[(x'-X)\,p + (y'-Y)\,q + (z'-Z)\,r]^2}{(x'-X)^2 + (y'-Y)^2 + (z'-Z)^2} = \textit{constante.}$$

c'est-à-dire pourvu que ce point se trouve sur la circonférence d'un cercle dont les équations sont

$$px' + qy' + rz' + \Phi\Pi'$$
$$(x' - X)^2 + (y' - Y)^2 + (z' - Z)^2 = L^2$$

L étant une constante qui indique la distance des différens points de ce cercle au point XYZ.

Cette condition se réduit à ce qu'on ait au commencement de l'intégrale où $\Pi = \Pi' = constante$,

$$d.\left[\frac{[(x'-X)p+(y'-Y)q+(z'-Z)r]^2}{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}\right] = \Psi'.\Pi.d\Pi = 0$$

et en partant de là il est nécessaire qu'on ait en général

$$d.\left[\frac{[(x-X)p+(y-Y)q+(z-Z)r]^2}{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}\right] = \Psi'.\Pi.d\Pi$$

équation dont l'intégrale sera, à cause de $\Phi.\Pi = px + qy + rz$,

$$(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2 = \chi.(px+qy+rz) \qquad (5)$$

χ étant une fonction dépendante de Φ et contenant la constante L. L'équation (5) est celle d'un système de surfaces de révolution dont les intersections avec les plans (4) qui passent par leur axe, détermineront les faisceaux de rayons courbes.

Il faut observer que dans ces calculs il n'est pas nécessaire de connoître la valeur absolue de ν^2; mais seulement les rapports $\frac{\Pi'^2}{\nu^2} + 1$, $\frac{\Pi^2}{\nu^2} + 1$ que nous avons représentés par J^2 et qui expriment le carré du rapport du si-

nus d'incidence au sinus de réfraction, lorsque la lumière pénètre dans le milieu dont la force réfractive est Π' ou Π, rapport que l'expérience pourra toujours donner.

[23] 2°. Lorsqu'on a $p\delta = x - \alpha$, $q\delta = y - \beta$, $r\delta = z - \gamma$, l'équation

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$$
$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + (z - \gamma)\,dz = 0$$

est celle d'une sphère, et par conséquent les couches de même force réfractive sont une suite de sphères concentriques

$$(x + \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \varphi.\ \Pi$$

Les équations $\int(3)$ deviennent, comme dans le paragraphe précédent,

$$\frac{p\,dy - q\,dx}{f} = \frac{r\,dx - p\,dz}{f'} = \frac{q\,dz - r\,dy}{f''} = dt$$

ou

$$\frac{(x - \alpha)\,dy - (y - \beta)\,dx)}{f}$$
$$= \frac{(z - \gamma)\,dx - (x - \alpha)\,dz}{f'}$$
$$= \frac{(y - \beta)\,dz - (z - \gamma)\,dy}{f'''} = \delta.\ dt$$

Or, lorsque la molécule lumineuse est encore comprise dans le rayon incident, et parvient au point $x'y'z'$ où commence l'intégrale, on a, en substituant pour dx', dy', dz', leurs valeurs prises dans l'équation (a),

$$\frac{(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a}{f}$$
$$=\frac{(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c}{f'}$$
$$=\frac{(y'-\beta)\,c-(z'-\gamma)\,b}{f''}$$
$$=\delta.\frac{dt}{du}(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui détermine les constantes f, f', f''; en sorte qu'on a enfin

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x-\alpha)\,dy-(y-\beta)\,dx}{(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a}\\ =&\frac{(z-\gamma)\,dx-(x-\alpha)\,dz}{(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c}\\ =&\frac{(y-\beta)\,dz-(z-\beta)\,dy}{(y'-\beta)\,c-(z'-\beta)\,b}\\ =&\frac{du}{(a^2+b^2+c^2)}\end{aligned}\right\}\quad f(3)$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$\left.\begin{aligned}&[(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c]\;d.\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\\ +&[(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a]\;d.\left(\frac{z-\gamma}{x-\alpha}\right)\end{aligned}\right\}=0.$$

et dont l'intégrale est

$$\begin{aligned}&[(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c].\frac{y-\beta}{x-\alpha}\\ +&[(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a].\frac{z-\gamma}{x-\alpha}\\ =&[(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c].\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}\\ +&[(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a].\frac{z'-\gamma}{x'-\alpha}\end{aligned}$$

ou enfin

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha).\,[(y'-\beta)\,c-(z'-\gamma)\,b]\\ +\,(y-\beta).\,[(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c]\\ +\,(z-\gamma).\,[(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a]\end{array}\right\}=0. \quad (4)$$

équation d'un plan qui passe par le centre $\alpha\beta\gamma$ des couches et par le point $x'y'z'$ où commence l'intégrale.

Si abc sont constans, c'est-à-dire si les rayons lumineux sont parallèles, l'équation précédente appartiendra à un système de plans qui contiennent tous une même ligne.

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$$

parallèle aux rayons incidens, et passant par le centre $\alpha\beta\gamma$ des couches.

Si les rayons partent d'un point lumineux XYZ, on substituera pour abc leurs valeurs prises dans l'équation (a), et l'équation (4) deviendra celle d'un système de plans qui passent par les points $\alpha\beta\gamma$, XYZ, $x'y'z'$.

On a en outre, d'après l'équation $f(3)$,

$$\begin{array}{l}[(x-\alpha)\,dy-(y-\beta)\,dx]^2\\ +\,[(z-\gamma)\,dx-(x-\alpha)\,dz]^2\\ +\,[(y-\beta)\,dz-(z-\gamma)\,dy]^2\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}=[(x'-\alpha)\,b-(y'-\beta)\,a]^2\\ +\,[(z'-\gamma)\,a-(x'-\alpha)\,c]^2\\ +\,[(y'-\beta)\,c-(z'-\gamma)\,b]^2\end{array}\right\}\frac{du^2}{(a^2+b^2+c^2)}$$

ou, en observant que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 \frac{v^2 + \Pi}{v^2 + \Pi'} = (v^2 + \Pi)\, dt^2$$

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$
$$= (x-\alpha)\,dx + (dy-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz = \frac{\varphi'.\,\Pi.\,d\Pi}{2}$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varphi.\Pi$$

et, substituant ces expressions dans l'équation précédente,

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi.\,\Pi.\,(v^2+\Pi) - \varphi.\,\Pi'.\,(v^2+\Pi') \\ +(v^2+\Pi').\,\dfrac{[a.\,(x'-\alpha)+b.\,(y'-\beta)+c.\,(z'-\gamma)]^2}{a^2+b^2+c^2} \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\varphi'.\,\Pi.\,d\Pi}{2\,dt} = \frac{\varphi'.\,\Pi.\,d\Pi.\,(v^2+\Pi)^{\frac{1}{2}}}{2\,(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Nous remarquerons, comme dans le paragraphe précédent, que le résultat de ces équations sera toujours le même, pourvu que le point $x'y'z'$ où commence l'intégrale, soit assujéti à la condition

$$\frac{[(x'-X).(x'-\alpha)+(y'-Y).(y'-\beta)+(z'-Z).(z'-\gamma)]^2}{(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2} = const.$$

c'est-à-dire pourvu que ce point se trouve sur la circonférence d'un cercle dont les équations sont

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2 = \varphi.\,\Pi'$$
$$(x'-X)^2 + (y'-Y)^2 + (z'-Z)^2 = L^2$$

L étant une constante qui indique la distance de chacun des points de ce cercle au point lumineux ZYZ.

Cette condition se réduit à ce qu'on ait au commencement de l'intégrale où $\Pi = \Pi' = constante$,

$$d.\left[\frac{[(x-X).(x-\alpha)+(y-Y).(y-\beta)+(z-Z).(z-\gamma)]^2}{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}\right] = \Psi'.\ \Pi.\ d\Pi = 0$$

et, en partant de là, il est nécessaire qu'on ait en général

$$d.\left[\frac{[(x-X).(x-\alpha)+(y-Y).(y-\beta)+(z-Z).(z-\gamma)^2]}{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}\right] = \Psi'.\Pi.d\Pi$$

équation dont l'intégrale sera, à cause de $\varphi.\ \Pi = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$,

$$(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2 = \chi.[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2] \qquad (5)$$

χ étant une fonction dépendante de φ et contenant la constante L. L'équation (5) est celle d'un système de surfaces de révolution dont chacune contient une série de rayons courbes semblables qui sont ses méridiens, parce qu'ils sont situés sur les plans (4) qui passent par l'axe.

Dans différentes circonstances, et particulièrement dans le calcul des réfractions astronomiques, il est avantageux de substituer aux coordonnées xyz le rayon vecteur compté du centre des couches, et l'angle compris entre ses différentes positions. On changera en général les coordonnées relativement à la forme des résultats auxquels on voudra parvenir.

[23] Les conséquences déduites des calculs des deux derniers paragraphes, auroient encore lieu si l'action des

forces réfractives s'exercoit à une distance finie, parce que ces calculs sont indépendans de l'intensité de la force ϖ, et n'ont rapport qu'à sa direction, qui seroit la même dans ce nouveau cas. Il faudroit seulement, pour parvenir au résultat final, calculer l'intensité de la force ϖ d'après la loi des distances suivant laquelle agiroit la force réfractive; et on voit *a priori* que, quelle que soit cette loi, l'expression de ϖ sera toujours une fonction de $px + qy + rz$, dans le cas où les couches sont parallèles, et de $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$, dans le cas où elles sont sphériques et concentriques.

Dans le paragraphe [21] nous avons regardé les couches d'égale force réfractive comme des surfaces quelconques, et nous avons supposé que l'action des différente scouches ne s'exercoit qu'à une distance infiniment petite, et c'est ce que semblent confirmer les phénomènes qui ont pu être analysés par l'expérience. Mais quand même les forces réfractives agiroient à une distance finie suivant une loi donnée, il seroit toujours possible de ramener le problème aux mêmes élémens. En effet, concevons un point particulier xyz dans l'intérieur du milieu proposé; quelle que soit la loi des forces qui agissent sur la molécule de lumière située en ce point, ces forces auront une résultante unique dont l'intensité (ϖ) pourra être déterminée, et qui sera dirigée suivant une droite particulière

$$\frac{x-x'}{[p]} = \frac{y-y'}{[q]} = \frac{z-z'}{[r]} \qquad (R)$$

$x'y'z'$ étant ses coordonnées générales. Ainsi on substi-

tuera dans les équations du paragraphe [21], $[p]$ $[q]$ $[r]$ à pqr. Il faut observer que $[p]\,dx + [q]\,dy + [r]\,dz$ n'est plus une différentielle exacte, parce que $[p]$ $[q]$ $[r]$ ne sont plus assujétis aux conditions d'intégrabilité ; ce qui d'ailleurs n'influe pas sur la forme des résultats du calcul. D'un autre côté la force (ϖ) que l'on doit substituer à ϖ est une fonction particulière de xyz,

$$(\varpi) = f.(xyz)\,; \quad d.(\varpi) = (p)\,dx + (q)\,dy + (r)\,dz$$

et les surfaces $(p)\,dx + (q)\,dy + (r)\,dz = 0$ ne sont plus normales aux directions (R) des résultantes que dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{[p]}{(p)} = \frac{[q]}{(q)} = \frac{[r]}{(r)}$$

Lorsque l'action s'exerce à une distance très-petite relativement à celle suivant laquelle augmente ou décroît la force réfractive des différentes couches, on peut supposer $(\varpi) = \varpi$, $[p] = (p) = p$, $[q] = (q) = q$, $[r] = (r) = r$; ce qui revient au cas que nous avons traité particulièrement.

[25] Si les rayons qui ont été réfractés par une surface sont réfléchis par une seconde surface, ou réciproquement, on déduira les circonstances de leur mouvement et leur position respective d'après les principes indiqués dans les paragraphes [11] [18], en combinant ensemble les expressions des rayons réfléchis et réfractés de la même manière que l'on combine les expressions

de ceux qui sont réfléchis ou réfractés plusieurs fois. On pourra aussi calculer par des procédés analogues l'intensité de clarté et les formes apparentes.

Les images des objets réfléchis ou réfractés sont ou droites ou renversées dans les deux sens, ou enfin droites dans un sens et renversées dans l'autre. Ces diverses circonstances se déduisent directement des calculs précédens. Il en est de même de la netteté de l'image; mais comme cette question tient aux formes de l'œil, je l'ai renvoyée aux applications que je dois faire de cette analyse.

La théorie que je viens d'exposer renferme la solution de tous les problèmes d'optique qui dépendent de la géométrie. Dans l'application de ces résultats aux arts et à l'explication des phénomènes naturels, j'aurai égard à l'absorbtion des rayons et aux autres modifications physiques de la lumière. Mais ces considérations étoient étrangères à cette première partie, uniquement destinée à traiter les questions d'optique qui dépendent des formes et des positions considérées sous le rapport le plus général.

SECONDE PARTIE.

Des substances cristallisées qui réfractent doublement la lumière.

[1] Les substances cristallisées sont formées par un assemblage de molécules similaires, réunies par juxtaposition, et disposées symétriquement. Dans l'arrangement régulier de ces molécules, les faces de chacune d'elles sont parallèles aux faces analogues des autres. La configuration extérieure des masses dépend de la manière dont les formes élémentaires sont distribuées autour du noyau commun; et comme cette distribution peut varier à l'infini, il en résulte une grande variété dans les formes régulières que peuvent affecter les cristaux d'une même substance; cependant toutes ces formes secondaires dépendent géométriquement de la forme primitive qui est invariable dans chaque espèce, et la position respective des molécules intégrantes est constamment la même.

Cette structure intérieure des cristaux n'a aucune influence sur leur limpidité, et la lumière traverse la plupart d'entre eux aussi facilement que les substances les plus diaphanes : mais la disposition symétrique des molécules intégrantes est l'élément principal des phénomènes de la double réfraction.

Dans la réfraction ordinaire, le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est une quantité constante;

mais ce rapport est variable dans la réfraction extraordinaire, et dépend non seulement de l'inclinaison du rayon incident sur la face réfringente, mais encore de sa position relativement aux molécules intégrantes du cristal.

La détermination de cette loi extraordinaire fait l'objet de cette seconde partie. J'établirai d'abord les faits par une série d'expériences dans lesquelles les phénomènes seront mesurés avec soin; je démontrerai ensuite que ces divers phénomènes sont liés par une même loi et sont produits par l'action d'une force répulsive particulière dont les effets se combinent avec ceux de la réfraction ordinaire.

Ces recherches me conduiront à développer de nouvelles propriétés de la lumière relatives au mode d'action qu'elle éprouve de la part de tous les corps diaphanes ou opaques, et qui sont intimement liées aux phénomènes de la double réfraction.

Les minéraux dans lesquels on a reconnu la propriété de doubler les images, sont :

Le spath d'Islande.
L'arragonite.
La chaux sulfatée.
La barite sulfatée.
La strontiane sulfatée.
La soude boratée.
Le quartz.
Le zircon,
Le corindon.
La cimophane.
L'émeraude.
L'euclase.
Le feldspath.
La mésotype.
Le péridot.
Le soufre.
Le mellite.
Le plomb carbonaté.
Le fer sulfaté.

Plusieurs produits chimiques susceptibles de cristalliser, jouissent aussi de cette propriété.

De tous ces corps le spath d'Islande est celui dans lequel les phénomènes dont il s'agit sont les plus apparens. Sa transparence parfaite qui égale celle de l'eau la plus limpide, la grande dimension de ses cristaux, la pureté de ses joints, sa disposition à se briser dans le sens des faces naturelles, et enfin la facilité avec laquelle on peut le tailler et le polir, en font la substance la plus propre à produire des phénomènes susceptibles d'une mesure exacte. Ce cristal sera donc l'objet de nos principales recherches. Nous étendrons ensuite aux autres corps les résultats auxquels nous aura conduits l'examen de celui-ci ; ce qui sera d'autant plus facile que, sans avoir recours à l'analogie, nous prouverons d'avance, par des expériences directes, l'identité d'action de tous les corps qui réfractent doublement la lumière.

CHAPITRE PREMIER.

Expériences sur la double réfraction et la double réflexion dans le spath d'Islande.

[2] Le spath d'Islande (spath calcaire, chaux carbonatée rhomboïdale, carbonate de chaux, kalkspath, spathiger kalkstein, doppelstein), est composé de 56.33 parties de chaux, 43.04 parties d'acide carbonique et 0.63 parties d'eau.

Sa pesanteur spécifique est 2.71409, celle de l'eau étant prise pour unité. Il est parfaitement diaphane, sans couleur, d'une dureté médiocre et susceptible d'un beau poli. Il cristallise en rhomboïdes obtus dont les faces, comme nous allons le voir, sont inclinées l'une à l'autre d'un angle de 105° 5′. Ses cassures sont lamelleuses, ordinairement parallèles aux faces du rhomboïde, quelquefois parallèles aux arêtes et aux grandes diagonales des faces.

Ses cristaux sont généralement purs; on en trouve dont le poids s'élève à plusieurs kilogrammes.

On appelle axe du rhomboïde la ligne qui joint les deux sommets obtus. Cette ligne est également inclinée sur toutes les faces. Sa position par rapport aux surfaces réfringentes est le principal élément de la double réfraction, et c'est le premier dont nous allons nous occuper. L'inclinaison de cet axe sur les faces naturelles peut se déduire facilement de l'angle qu'elles forment entre elles.

Nous déterminerons donc de préférence ce dernier angle, parce qu'il est susceptible d'une mesure très-précise. Cependant, comme ce premier chapitre est uniquement destiné aux expériences et à établir les élémens des calculs, ce n'est que dans le second qui renferme les recherches analytiques, que je déduirai de l'angle des faces les différens angles compris entre l'axe, les faces et les arêtes; dans le quatrième chapitre j'établirai les relations qui existent entre la forme primitive du cristal et ses formes secondaires.

L'angle compris entre les faces du cristal a été mesuré par la réflexion des images, à l'aide du cercle répétiteur.

Soient (*fig.* 1):

α, l'angle aigu compris entre les faces du rhomboïde;

β, γ les angles observés entre les deux signaux et leurs images vues par réflexion;

δ l'angle observé entre les deux signaux.

Chacun des angles β, γ, δ a été mesuré par dix observations, et on en a conclu α par l'équation

$$\alpha = \delta - \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Première série d'observations. Cassures du cristal A.

$$\beta = \frac{360^\circ - 251^\circ\ 50'}{10} = \frac{108^\circ\ 10'}{10} = 10^\circ\ 49'\ 0''$$

$$\gamma = \frac{93^\circ\ 47'\ 30}{10} = \ldots\ldots = 9^\circ\ 22'\ 45''$$

$$\delta = \frac{2.360^\circ + 130^\circ\ 6'\ 40''}{10} = \frac{850^\circ\ 6'\ 40''}{10} = 85^\circ\ 0'\ 40''$$

$$\alpha = \delta - \frac{\beta + \gamma}{2} = 85^\circ\ 0'\ 40'' - 10^\circ\ 5'\ 52''\tfrac{1}{2}$$

$$= 74^\circ\ 54'\ 47''\tfrac{1}{2}$$

Seconde série d'observations. Autres cassures du cristal A.

$$\beta = \frac{2.360^\circ - 75^\circ\ 50'}{10} = \frac{644^\circ\ 10'}{10} = 64^\circ\ 25'\ 0''$$

$$\gamma = \frac{2.360^\circ + 75^\circ\ 5'}{10} = \frac{795^\circ\ 5'}{10} = 79^\circ\ 30'\ 30''$$

$$\delta = \frac{4.360^\circ + 28^\circ\ 50'}{10} = \frac{1468^\circ\ 50'}{10} = 146^\circ\ 53'\ 0''$$

$$\alpha = \delta - \frac{\beta + \gamma}{2} = 146^\circ\ 53'\ 0'' - 71^\circ\ 57'\ 45''$$

$$= 74^\circ\ 55'\ 15''$$

Troisième série d'observations. Cassures du cristal B.

$$\beta = \frac{360^\circ - 243^\circ\ 18'\ 20''}{10} = \frac{116^\circ\ 41'\ 40''}{10} = 11^\circ\ 40'\ 10''$$

$$\gamma = \frac{85^\circ\ 10'}{10} = \ldots\ldots = 8^\circ\ 31'\ 0''$$

$$\delta = \frac{2.360^\circ + 130^\circ\ 6'\ 40''}{10} = \frac{850^\circ\ 6'\ 40''}{10} = 85^\circ\ 0'\ 40''$$

$$\alpha = \delta - \frac{\beta + \gamma}{2} = 85^\circ\ 0'\ 40'' - 10^\circ\ 5'\ 35''$$

$$= 74^\circ\ 55'\ 5''$$

La valeur moyenne entre ces trois séries d'observa-

tions est $74° 55' 2'' \frac{1}{2}$. Nous nous arrêterons, à cause des erreurs d'observations, à

$$\alpha = 74° 55' 0''$$

la limite des plus grandes erreurs étant de 15 secondes.

Cet angle a pour mesure, suivant

Bartholin	76° 20′ 40″
La Hyre	75° 0′ 0″
Huyghens	74° 59′ 50″
Capelles	73° 7′ 40″
Romé de Lille	73° 57′ 53″
Haüy	75° 31′ 21″
Wollaston	74° 55′ 0″

[3] Dans les diverses expériences que j'ai faites sur la double réfraction, j'ai presque toujours observé directement l'angle compris entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire ; en sorte que pour déterminer exactement la position de ce dernier, j'ai commencé par reconnoître l'élément de la réfraction ordinaire, c'est-à-dire le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction. Pour mesurer cette quantité il faut tailler le cristal en prisme, et le considérer comme un simple corps diaphane, en n'opérant que sur l'image produite par la réfraction ordinaire, et n'ayant point égard à la seconde image.

Après avoir disposé le cercle répétiteur horizontalement et les arêtes du prisme verticalement, on dirige une des lunettes du cercle sur le signal, et l'autre sur son image ordinaire vue dans le prisme ; on fait ensuite

tourner ce dernier autour d'un axe vertical, jusqu'à ce que l'image soit stationnaire. Dans cette position, le rayon réfracté dans l'intérieur du prisme, fait un angle égal avec chacune des faces réfringentes. On connoît alors l'angle de réfraction, qui se trouve égal à la moitié de celui compris entre les faces réfringentes du prisme. Quant à l'angle d'incidence, il est évidemment égal à l'angle de réfraction, plus la moitié de l'angle compris entre le rayon dirigé sur l'objet et celui dirigé sur son image.

Soit l le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction dont il s'agit d'établir la valeur.

Nous commencerons par déterminer l'angle compris entre les faces du prisme, en observant par réflexion, avec un cercle répétiteur, les images de deux signaux situés à environ 1200 mètres.

Soient (*fig.* 2) :

α l'angle réfringent du prisme qu'il s'agit de déterminer;

β, γ les angles observés entre chaque signal et son image;

δ l'angle observé entre les deux signaux.

La quinzième observation donne, pour β, $3.360^\circ - 264^\circ\ 42'\ 45''$,

$$\beta = \frac{3.360^\circ - 264^\circ\ 42'\ 45''}{15} = \frac{815^\circ\ 17'\ 15''}{15} = 54^\circ\ 21'\ 9''$$

La quinzième observation donne, pour γ, $2.360^\circ + 1^\circ\ 15'$,

$$\gamma = \frac{2.360^\circ + 1^\circ\ 15'}{15} = \frac{721^\circ\ 15'}{15} = 48^\circ\ 5'\ 0''$$

La quinzième observation croisée donne, pour $3.360^\circ + 313^\circ\ 51'\ 15''$,

$$\delta = \frac{3.360^\circ + 313^\circ\ 51'\ 15''}{30} = \frac{1393^\circ\ 51'\ 15''}{30} = 46^\circ\ 27'\ 42''\frac{1}{4}$$

et enfin

$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} - \delta = 4^\circ\ 45'\ 22''$, angle réfringent du prisme.

Nommons actuellement ε (*fig.* 3) l'angle compris entre le signal et son image vue par réfraction quand elle est stationnaire, on aura

$$l = \frac{\sin.\ \frac{\alpha + \varepsilon}{2}}{\sin.\ \frac{\alpha}{2}}$$

Le résultat de la dixième observation à droite (soleil midi) a donné		$31^\circ\ 9'\ 0''$
La dixième observation à droite (temps couvert) . .		$31^\circ\ 12'\ 0''$
La dixième observation à gauche (soleil couchant). .	$360^\circ -$	$328^\circ\ 49'\ 30''$
La dixième observation à gauche (soleil levant) . .	$360^\circ -$	$328^\circ\ 52'\ 30''$

$$\varepsilon = \frac{2.360^\circ + 31^\circ\ 9' + 31^\circ\ 12' - 328^\circ\ 49'\ 30'' - 328^\circ\ 52'\ 30}{40}$$

$$= \frac{124^\circ\ 39'}{40} = 3^\circ\ 6'\ 58''\frac{1}{2}$$

$$l = \frac{\sin.\ \frac{\alpha + \varepsilon}{2}}{\sin.\ \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin.\ 3^\circ\ 56'\ 10''\frac{1}{4}}{\sin.\ 2^\circ\ 22'\ 41''} = 1.65438684$$, rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Si on prend seulement les dix secondes observations faites par un temps couvert, circonstance dans laquelle le spectre coloré est beaucoup moindre, on aura

$$\alpha = 4^\circ\ 45'\ 22''; \quad \varepsilon = 3^\circ\ 7'\ 12''$$

$$l = \frac{\sin.\ \frac{\alpha + \varepsilon}{2}}{\sin.\ \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin.\ 3^\circ\ 56'\ 17''}{\sin.\ 2^\circ\ 22'\ 41''} = 1.65516973$$

[4] *Observations sur un second prisme.*

A quatre millimètres du tranchant du prisme, la dixième observation donne, pour β. 2 . 360° — 117° 30′,

$$\beta = \frac{2 . 360^\circ - 117^\circ\ 30'}{10} = \frac{602^\circ\ 30'}{10} = 60^\circ\ 15'$$

La dixième observation donne, pour γ. 2 . 360° — 54°,

$$\gamma = \frac{2 . 360^\circ - 54^\circ}{10} = 66^\circ\ 36'$$

On a, comme dans l'observation précédente $\delta = 46^\circ\ 27'\ 42''\ \frac{1}{2}$,

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} - \delta = 16^\circ\ 57'\ 47''\ \tfrac{1}{2}$$

A quatre millimètres du dos du prisme, la dixième observation a donné, pour β. 2 . 360°— 116° 50′,

$$\beta = \frac{2 . 360^\circ - 116^\circ\ 50''}{10} = \frac{603^\circ\ 10'}{10} = 60^\circ\ 19'$$

La dixième observation a donné, pour γ. 2 . 360° — 55° 20′,

$$\gamma = \frac{2 . 360^\circ - 55^\circ\ 20'}{10} = \frac{664^\circ\ 40'}{10} = 66^\circ\ 28'$$

On a, comme dans l'observation précédente $\delta = 46^\circ\ 27'\ 42''\frac{1}{2}$

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} - \delta = 16^\circ\ 55'\ 47''\frac{1}{2}$$

Au milieu des faces du prisme, la dixième observation donne pour β. $2 \cdot 360^\circ - 44^\circ\ 5'$,

$$\beta = \frac{2 \cdot 360^\circ - 44^\circ\ 5'}{10} = \frac{675^\circ\ 55'}{10} = 67^\circ\ 35'\ 30''$$

La dixième observation donne, pour γ. $2 \cdot 360^\circ - 127^\circ 45'$,

$$\gamma = \frac{2 \cdot 360^\circ - 127^\circ\ 45'}{10} = \frac{592^\circ\ 15'}{10} = 59^\circ\ 13'\ 30''$$

Comme dans les observations précédentes, $\delta = 46^\circ\ 27'\ 42''\frac{1}{2}$,

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} - \delta = 16^\circ\ 56'\ 47''\frac{1}{2}$$

Nous nous arrêterons à cette dernière valeur.

ε étant toujours l'angle compris entre le signal et son image, la douzième observation a donné

$$\varepsilon = 360^\circ - 223^\circ\ 58' \text{ (temps couvert)}$$

$$\varepsilon = \frac{360^\circ - 223^\circ\ 58'}{12} = \frac{136^\circ\ 2'}{12} = 11^\circ\ 20'\ 10''$$

$$l = \frac{sin.\ \frac{\alpha + \varepsilon}{2}}{sin.\ \frac{\alpha}{2}} = \frac{sin.\ 14^\circ\ 8'\ 28''\frac{1}{4}}{sin.\ 8^\circ\ 28'\ 23''\frac{1}{4}} = 1.65807908$$

Le résultat d'une première observation dont les élémens sont perdus, m'avoit donné

$$\alpha = 26^\circ\ 21'\ 30''\tfrac{155}{549}\ ;\quad \varepsilon = 18^\circ\ 0'\ 0''$$

$$l = \frac{\sin.\ \frac{\alpha+\varepsilon}{2}}{\sin.\ \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin.\ 22^\circ\ 10'\ 45''\ \frac{77}{549}}{\sin.\ 13^\circ\ 10'\ 45''\ \frac{77}{549}} = 1.65574$$

Parmi les résultats précédens relatifs aux valeurs de l, ceux qui me paroissent mériter le plus de confiance sont les trois suivans :

1.65516973
1.65807908
1.65574...

Valeur moyenne, $l = 1.6563296$.

On conclut de là $l^2 = 2.743427$. Or, en nommant k^2 la quantité dont le carré de la vitesse est augmenté par la force réfractive, et prenant pour unité la vitesse de la lumière dans l'air, on aura

$$k^2 = l^2 - 1 = 1.743427$$

Cette quantité divisée par la pesanteur spécifique du spath calcaire 2.71409, exprime le pouvoir réfringent de cette substance.

La valeur de l que nous venons de déterminer, appartient au rayon moyen du spectre coloré, et comporte les erreurs qui dépendent de la détermination précise du centre du spectre. Les observations suivantes sur la double réfraction nous conduiront à une valeur plus approchée du rapport l, qu'il est d'autant plus important de connaître avec exactitude que les moindres différences dans ce nombre ont une grande influence sur la valeur du pouvoir réfringent.

[5] Si un faisceau lumineux ab (*fig.* 4) tombe perpendiculairement sur la face naturelle d'un rhomboïde, il se divise en deux rayons; l'un bc, que nous nommerons rayon ordinaire, continue à se mouvoir dans la direction du rayon incident; l'autre bc', que nous nommerons rayon extraordinaire, s'éloigne de cette direction; ces deux rayons, après avoir traversé le cristal, sortent en ce, $c'e'$ parallèlement à ab.

Le plan qui passe par les deux rayons bc, bc', et qui est perpendiculaire à la face d'incidence, se nomme plan de la section principale, parce qu'il est parallèle à l'axe AB du cristal qui joint les deux sommets du rhomboïde, composés chacun de trois angles plans obtus et semblables. On distingue cette section de toutes les autres, parce qu'elle jouit, relativement à la double réfraction, d'une propriété particulière que nous allons bientôt indiquer.

La longueur cc' a été mesurée par plusieurs observations sur un cristal dont l'épaisseur $bc = 0^m,03389074$. Le résultat moyen des observations a été :

$cc' = 0^m,00369$
0,00370
0,003675
0,00368 7
0,003687 5
0,003675
0,00368
0,00369
0,00370
0,00368

La valeur moyenne donne

$$tang.\ cbc' = 0.1087745$$

Ces observations, jointes à celles qui ont été faites dans d'autres sens, donnent pour dernier résultat

$$cbc' = 6^{\circ}\ 12'\ 38''$$

[6] Supposons actuellement que le rayon incident ab (*fig.* 5), sans sortir du plan de la section principale, soit incliné à la surface réfringente, et nommons θ l'angle d'incidence compris entre le rayon ab et la perpendiculaire à la surface; le rayon incident, en entrant dans le cristal, se divisera en deux rayons bc, bc' qui seront encore contenus dans le plan de la section principale, et ces deux rayons parvenus à la face inférieure du rhomboïde, en sortiront en ce $c'e'$ parallèlement au rayon incident.

Les amplitudes cc' ont été mesurées sur un cristal dont l'épaisseur $= 0^{m}03389074$, et voici le résultat moyen des observations :

$\theta = 10^{\circ}$	$cc' = 0^{m}00384$	$\theta = -10^{\circ}$	$cc' = 0^{m}00349$
$= 20^{\circ}$	$= 0.00404$	$= -20^{\circ}$	$= 0.00331$
$= 30^{\circ}$	$= 0.00426$	$= -30^{\circ}$	$= 0.003065$
$= 45^{\circ}$	$= 0.00468$	$= -45^{\circ}$	$= 0.00265$
$= 60^{\circ}$	$= 0.00518$	$= -60^{\circ}$	$= 0.00218$

Le rayon bc est réfracté suivant la loi ordinaire; en sorte que pour un angle d'incidence donné on peut le construire à l'aide des formules ordinaires. Quant au

rayon extraordinaire bc', la loi de sa réfraction devra être telle qu'elle satisfasse aux différentes valeurs de cc' fournies par l'expérience.

[7] L'amplitude cc' (*fig.* 6) dans les observations précédentes et les grandeurs analogues dans les expériences suivantes, ont été mesurées à l'aide d'une règle de cuivre blanchie sur laquelle est tracée une échelle gh d'un décimètre, divisée en millimètres. A l'extrémité h s'élève la perpendiculaire hi d'un centimètre et on a tracé l'hypothénuse gi. Lorsqu'on place sur cette règle un rhomboïde de cristal de manière que sa section principale soit perpendiculaire à la ligne gh, l'image ordinaire de gh et l'image extraordinaire de gi se coupent en un point; et le nombre correspondant à ce point d'intersection exprime en dixièmes de millimètres la grandeur de l'amplitude; on peut en outre avoir facilement les centièmes de millimètres, puisque cela se réduit à estimer des dixièmes, et il est difficile que l'erreur s'étende au-delà de deux de ces dixièmes.

Avant de passer aux expériences je vais indiquer les diverses causes d'erreur qui peuvent influer sur les observations, et les moyens que j'ai employés pour les éviter.

1°. Le défaut de parallélisme des faces opposées du cristal et les feuillures qu'il est très-difficile d'éviter. C'est ce qui m'a engagé à employer un cristal de 34 millimètres d'épaisseur de préférence à des rhomboïdes plus épais, mais dont les faces étoient moins planes.

2°. La position horizontale de la règle de cuivre. Il

est nécessaire d'avoir toujours sur cette règle un petit niveau sphérique à bulle d'air pour s'assurer que son niveau ne varie pas pendant le cours des expériences.

3°. La section principale du cristal doit être exactement à angle droit avec l'échelle de division gh. A cet effet on trace sur l'échelle plusieurs lignes très-fines perpendiculaires à gh, et on tourne le cristal jusqu'à ce que le point de mire étant fixé au-dessus d'une de ces lignes ses deux images se confondent parfaitement.

4°. Il faut employer pour mesurer les angles d'incidence θ un bon cercle armé d'un niveau à bulle d'air. Le limbe du cercle doit être vertical et exactement perpendiculaire ou parallèle à gh. J'ai substitué à la lunette astronomique du cercle une lunette microscopique d'un long foyer : quelquefois une lunette sans oculaire avec des objectifs de 1 à 4 décimètres de foyer ; enfin le moyen que j'ai le plus généralement adopté a été de substituer à la lunette mobile une lame de cuivre bien dressée dont les arêtes étoient exactement parallèles à l'axe de la lunette. On fait tourner la lame jusqu'à ce qu'une de ses arêtes soit exactement dirigée sur le point de l'intersection des deux images ordinaire et extraordinaire, ce qu'on juge facilement à l'œil nu, lorsqu'on a soin de faire les expériences au grand jour.

Lorsqu'on se donne l'angle d'incidence *à priori* ; c'est l'échelle de cuivre qui porte le cristal qu'il faut faire mouvoir jusqu'à ce que le point d'intersection des deux images se trouve dans le prolongement de l'arête de la règle métallique substituée à la lunette ; dans ce dernier

cas la règle qui porte l'échelle doit être posée sur une glace dépolie bien fixe afin qu'en glissant horizontalement elle ne perde pas son niveau.

[8] Considérons actuellement la réfraction du rayon extraordinaire lorsque le rayon incident et la normale au point d'incidence sont dans un plan perpendiculaire à celui de la section principale ; la face réfringente étant toujours une face naturelle du rhomboïde (*fig. 7.*), dans ce cas j'ai mesuré de la même manière que dans les observations précédentes les distances comprises entre le point d'émergence du rayon ordinaire et celui du rayon extraordinaire, et je les ai rapportées au plan de la section principale et à celui qui lui est perpendiculaire.

La moyenne entre ces observations a donné sur un cristal dont l'épaisseur $= 0^{m}03389074$:

$\theta = 10°$	$cd = 0^{m}000660$	$c'd = 0^{m}0037.$
$= 20°$	$= 0.001350$	$= 0.00367$
$= 30°$	$= 0.002062$	$= 0.0037.$
$= 40°$	$= 0.002862$	$= 0.00375$
$= 50°$	$= 0.00391\frac{1}{2}$	$= 0.0037.$

D'après ces observations on doit conclure que la valeur de $c'd$ est constante pour toutes les inclinaisons du rayon incident, et nous l'arrêterons à $c'd = 0.0037$: les différences qui se trouvent entre les résultats de l'observation sont comprises dans la limite des erreurs probables, et dépendent soit du défaut de parallélisme des instrumens soit des feuillets qui sont inévitables sur la face naturelle du cristal employé dans l'expérience.

[9] Si on coupe un rhomboïde AB de spath calcaire par deux plans gh, $g'h'$ perpendiculaires à l'axe AB qui joint les deux angles obtus A, B, et si on en retranche les deux pyramides à bases triangulaires équilatérales Ahg, $Bh'g'$, la double réfraction sur ces nouveaux plans hg, $h'g'$ offre des phénomènes particuliers, que je vais décrire,

1°. Si on fait tomber un rayon de lumière perpendiculairement à une de ces faces artificielles gh, $g'h'$ il n'est pas divisé; la réfraction est simple.

2°. Si le rayon incident est incliné sur la face, la réfraction est double; mais l'angle compris entre le rayon réfracté ordinaire et le rayon réfracté extraordinaire est constant pour une même inclinaison, quel que soit d'ailleurs le plan d'incidence, ce qui n'a lieu que pour les faces perpendiculaires à l'axe.

J'ai observé les lois de cette réfraction sur un cristal dont l'épaisseur $= 0^m030125$, et j'ai mesuré, comme dans les observations précédentes, la distance cc' comprise entre les points d'émergence des deux rayons, ce qui a donné en nommant θ l'angle d'incidence :

$\theta = 10°$	$cc' = 0^m00081\frac{5}{7}$
$= 15°$	$= 0{,}001190$
$= 20°$	$= 0{,}001600$
$= 25°$	$= 0{,}002020$
$= 30°$	$= 0{,}002462\frac{2}{7}$
$= 35°$	$= 0{,}002890$
$= 40°$	$= 0{,}003497\frac{2}{7}$

Les faces naturelles de la chaux carbonatée basée sont parallèles aux faces artificielles $gh\,g'h'$ du rhomboïde.

[10] J'ai coupé un rhomboïde de spath calcaire (*fig.* 9) par deux plans parallèles à l'axe AB du cristal et aux arêtes latérales. La réfraction sur les faces artificielles a présenté les phénomènes suivans :

1°. Le rayon perpendiculaire à une de ces faces n'est pas divisé en deux comme sur une face naturelle. La réfraction est simple.

2°. Si on place sous le cristal un papier sur lequel sont tracées deux lignes rectangulaires CD, EF, de manière que la ligne CD soit parallèle à l'axe AB du cristal, on observe que tant que l'œil est compris dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente et passant par CD, l'image de la ligne CD paroît simple, parce que ses deux images se confondent et l'image de EF est double. Si au contraire l'œil est situé dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente et passant par EF, l'image de EF paroît simple et celle de CD est double. Dans tous les autres cas les deux lignes CD, EF offrent une double image.

J'ai mesuré pour différens angles d'incidence la distance comprise entre les deux images de CD lorsque le plan d'incidence lui est perpendiculaire, et j'ai trouvé, l'épaisseur du cristal étant $0^m,0338$, l'angle d'incidence étant représenté par θ et la distance des images par cc'.

$\theta = 10°$	$cc' = 0^m,00043$
$= 20°$	$= 0,00086$
$= 30°$	$= 0,00137$
$= 40°$	$= 0,00198$
$= 50°$	$= 0,00270$

[11] Si on fait tomber un rayon de lumière ab (*fig.* 10.) sur la surface naturelle d'un rhomboïde de spath calcaire, une partie se réfléchit suivant bm, comme cela arrive à la surface d'incidence ou d'émergence de tous les corps diaphanes; l'autre partie se réfracte en deux faisceaux, l'un ordinaire bc, l'autre extraordinaire bc'. Ces deux rayons parvenus à la surface d'émergence se réfléchissent aussi en partie, enfin ce qui a échappé à cette réflexion partielle sort du cristal suivant les lignes ce, $c'e'$ parallèles au rayon incident. Mais ce qu'il y a de particulier à ce phénomène, c'est que les rayons ordinaire ou extraordinaire qui forment chacun un faisceau unique en sortant du cristal se réfléchissent néanmoins l'un et l'autre en deux faisceaux, en sorte qu'il y a quatre rayons réfléchis cf cf', $c'g$ $c'g'$; chacun de ces rayons parvenu de nouveau à la première face du cristal, en sort parallèlement au rayon réfléchi bm; ensorte que le rayon incident, après avoir été réfracté à la première face et réfléchi à la seconde, produit les quatre rayons émergens parallèles fh, $f'h'$; gi, $g'i'$.

Si on fait tomber sur la face inférieure du cristal deux rayons kc $k'c'$ formant avec cette surface et la section principale le même angle que le rayon incident ab forme avec la surface supérieure et la section principale, ces deux rayons en se réfractant dans le cristal produisent quatre rayons émergens qui se confondent avec les rayons fh, $f'h'$; gi, $g'i'$.

[12] Lorsque le rayon incident est dans la section prin-

cipale les deux rayons $f'h'$, gi disparoissent, et les rayons émergens se réduisent aux deux faisceaux fh, $g'i'$; dans ce cas, pour représenter les phénomènes par la réfraction, il ne faut pas faire tomber sur la face inférieure deux rayons de lumière directe qui en produiroient quatre émergens, comme dans l'expérience précédente. On doit faire tomber sur cette face deux rayons pc, $p'c'$ (*fig.* 11,) provenant d'un second rhomboïde $A'B'$, ayant sa section principale parallèle à celle du premier, et l'angle A' tourné vers l'angle B; alors le rayon ordinaire étant réfracté simplement suivant la loi ordinaire, et le rayon extraordinaire n'étant soumis qu'à la réfraction extraordinaire, on obtient par la réfraction deux faisceaux uniques qui se confondent avec les rayons fh, $g'i'$ produits par la réflexion.

Je développerai dans le troisième chapitre cette propriété que les rayons acquièrent lorsqu'ils ont traversé un premier rhomboïde; et qui les rend susceptibles de ne pas être divisés de nouveau par l'action d'un second cristal.

J'ai mesuré pour différens angles θ d'incidence la distance fg' sur un cristal dont l'épaisseur étoit $0^m,0338907$, et la moyenne des observations m'a donné le résultat suivant :

$\theta = 10°$	$fg' = 0^m,00035$
$= 20°$	$= 0,00075$
$= 30°$	$= 0,00115$
$= 45°$	$= 0,00200$
$= 60°$	$= 0,00300$

Ces mesures ont été prises sur un papier transparent

appliqué sur la surface supérieure du cristal aux points d'émergence.

Les expériences doivent être faites dans une chambre noire et avec des rayons solaires dirigés par un réflecteur; on s'assure de l'angle d'incidence des rayons en recevant le rayon réfléchi dans la lunette d'un cercle dégarnie de ses verres, et dont le limbe est vertical. La lunette qui porte le niveau à bulle d'air est fixée à 0°. La face réfléchissante du cristal est disposée horizontalement à l'aide d'un petit niveau sphérique à bulle d'air.

[13] Lorsque le plan d'incidence *a b m* (*fig.* 10) est perpendiculaire à la section principale, on remarque les phénomènes suivans :

Le point *f* est, comme dans les cas précédens, le point d'émergence du rayon réfracté ordinaire réfléchi ordinairement;

Le point *f'* celui du rayon réfracté ordinaire réfléchi extraordinairement;

Le point *g* celui du rayon réfracté extraordinaire réfléchi ordinairement;

Le point *g'* celui du rayon réfracté extraordinaire réfléchi extraordinairement.

Dans ces expériences, la ligne qui passe par les points d'émergence *f g'* est comprise dans le plan d'incidence; celle qui passe par les points *f' g* lui est perpendiculaire. La distance *f' g*, mesurée sur un cristal dont l'épaisseur est = 0.03389074 est constamment égale à $0^{m}0074$.

Quant à la distance *f g'*, elle varie avec l'angle

d'incidence θ, et elle est pour les différentes valeurs de θ :

$\theta = 10°$	$fg = 0.0013$
$= 20°$	$= 0.0026$
$= 30°$	$= 0.0041$
$= 40°$	$= 0.0057$
$= 50°$	$= 0.0076$

Les expériences qui précèdent suffisent pour déterminer avec une grande exactitude les élémens de la double réfraction dans le spath d'Islande. Quand j'aurai établi dans le chapitre suivant la loi de ce phénomène, je rapporterai de nouveaux faits, en montrant leur accord avec les résultats de l'analyse.

CHAPITRE II.

Théorie analytique des lois de la double réfraction dans le spath d'Islande.

[14] Nous avons observé dans la première partie que le spath d'Islande cristallisoit en rhomboïdes, et nous avons nommé axe de ce solide la ligne qui joint les deux sommets obtus et qui est également inclinée sur toutes les faces. La position de cet axe par rapport aux surfaces réfringentes étant le principal élément de la double réfraction, je vais commencer par établir la relation des angles compris entre les faces, les arêtes et l'axe du rhomboïde.

Plaçons l'origine des coordonnées rectangulaires xyz au centre du rhomboïde, et supposons que son axe forme des angles égaux avec ceux des coordonnées; imaginons de plus que les six arêtes correspondantes aux extrémités de l'axe, soient situées deux à deux dans les plans passant par cet axe et par chacun de ceux des coordonnées, l'équation de l'axe du rhomboïde sera

$$x = y = z \qquad (a)$$

et les équations des six plans qui comprennent les faces seront

$$\left.\begin{aligned} x + y + zD &= \pm E \\ x + yD + z &= \pm E \\ xD + y + z &= \pm E \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

d'où on conclut les équations des lignes qui contiennent les douze arêtes,

$$\left.\begin{aligned} x.(1-D) &= -z.(1-D^2)+E.(\pm 1 \mp D) \\ &= -y.(1-D^2)+E.(\pm 1 \mp D) \\ y.(1-D) &= -z.(1-D^2)+E.(\pm 1 \mp D) \\ &= -x.(1-D^2)+E.(\pm 1 \mp D) \\ z.(1-D) &= -x.(1-D^2)+E.(\pm 1 \mp D) \\ &= -y.(1-D^2)+E.(\pm 1 \mp D) \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Chacune de ces équations présente seize combinaisons; mais comme le signe ± 1 du second membre varie nécessairement avec le signe $\mp D$ du troisième, de même que le signe ± 1 du troisième varie nécessairement avec le signe $\mp D$ du second, ces seize combinaisons se réduisent à quatre, et celles des trois équations à douze.

Les quantités D et E dépendent de la forme et des dimensions du rhomboïde.

Pour déterminer D, nous observerons qu'en nommant p le cosinus de l'angle que forment entre eux les plans du rhomboïde, quantité qui doit être déterminée par l'expérience, on aura

$$p = -\frac{1+2D}{2+D^2}; \quad D = -\frac{1+\sqrt{1-p-2p^2}}{p}$$

Quant à E, en nommant $x'y'z'$, $-x'$, $-y'$, $-z'$ les coordonnées des extrémités de l'axe, on aura en général

$$E = x'+y'+z'D = x'+y'D+z' = x'D+y'+z'$$

et, en représentant par ξ la longueur de cet axe,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{\xi^2}{4}; \quad x' = y' = z' = \frac{\xi}{2\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{\xi}{2\sqrt{3}}(2 + D)$$

On peut déduire directement des équations (a) (b) (c) les angles compris entre les faces, les arêtes et l'axe du rhomboïde en fonction les uns des autres. En effet, en nommant p, q, r, s, t les cosinus de ces angles, on aura, le cosinus de l'angle compris,

Entre les faces du rhomboïde, $p = -\frac{1 + 2D}{2 + D^2}$

Entre les arêtes du rhomboïde, $q = -\frac{1 + 2D}{(1 + D)^2 + 2}$

Entre les faces et l'axe..... $r = \frac{\sqrt{2}(1 - D)}{\sqrt{3}(2 + D^2)^{\frac{1}{2}}}$

Entre les arêtes et l'axe..... $s = \frac{1 - D}{[(1 + D)^2 + 2]^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}}$

Entre les arêtes et les faces.... $t = -\frac{\sqrt{2}(1 + 2D)}{(D^2+2)^{\frac{1}{2}}[(1+D)^2+2]^{\frac{1}{2}}}$

En éliminant D entre ces cinq équations, on obtient les quatre suivantes :

$$\frac{q - p}{pq} = 1; \quad \frac{t^2}{pq} = 2; \quad \frac{t^2}{r^2}\cdot\frac{(1+p)}{pq} = 3; \quad \left(\frac{1 - s^2}{1 - r^2}\right)\cdot\frac{r^2}{s^2} = 4$$

qui donnent les valeurs des quantités $pqrst$ lorsque l'une d'entre elles est connue ; nous les déduirons de la

valeur de p qui est donnée directement par l'expérience [2]; en sorte que

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{p}{1-p} \\ r &= (1+p)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ s &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^{\frac{1}{2}} \\ t &= p\cdot\frac{\sqrt{2}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

[15] Les substances cristallisées sont susceptibles de prendre une infinité de formes secondaires dépendantes de la forme primitive. Parmi les formes secondaires du spath d'Islande, celle qu'il nous importe le plus de connoître, à cause des résultats généraux auxquels conduit son examen, est la figure rhomboïdale, dont les faces sont tangentes aux arêtes du rhomboïde primitif. Concevons par chacune des extrémités de l'axe trois nouveaux plans passant par les arêtes du rhomboïde, et faisant des angles égaux avec les faces contiguës, ces six plans auront pour équation

$$\begin{aligned} 2x + (y+z).(1+D) &= \pm E' \\ 2y + (x+z).(1+D) &= \pm E' \\ 2z + (x+y).(1+D) &= \pm E' \end{aligned}$$

Ils formeront un nouveau rhomboïde ayant le même axe ξ que le premier, mais dont les faces comprendront un nouvel angle dont le cosinus $_1p$ sera

$$_1p = -\frac{4.(1+D)+(1+D)^2}{4+2(1+D)^2} = \frac{3p-1}{2(1-p)}$$

En faisant la même opération sur ce second rhomboïde, on en aura un troisième dont les faces comprendront un nouvel angle dont le cosinus ${}_{n}p$ sera

$$ {}_{n}p = \frac{3\,{}_{1}p - 1}{2\,(1 - {}_{1}p)} $$

et en général après un nombre n d'opérations semblables,

$$ {}_{n+1}p = \frac{3\,{}_{n}p - 1}{2\,(1 - {}_{n}p)} \qquad \text{(e)} $$

tous ces rhomboïdes sont liés entre eux par une même loi, en sorte qu'un seul d'entre eux étant donné on pourra déterminer tous ceux qui appartiennent à la même série. Or il est évident que le rhomboïde correspondant à p, étant regardé comme une forme élémentaire, toutes les formes dérivées correspondantes à ${}_{1}p, {}_{11}p, {}_{111}p$, pourront être regardées comme formées par la superposition de petits rhomboïdes de la forme élémentaire disposés simétriquement, suivant la loi que nous venons d'exposer. On obtiendra pour ${}_{n+1}q$, ${}_{n+1}r$, ${}_{n+1}s$, ${}_{n+1}t$, des équations analogues à celle que nous avons eue pour ${}_{n+1}p$, en sorte qu'on aura les cinq équations aux différences

$$ {}_{n+1}p = \frac{3\,{}_{n}p - 1}{2\,(1 - {}_{n}p)} $$

$$ {}_{n+1}q = \frac{1 - 2\,{}_{n}q}{3 - 2\,{}_{n}q} $$

$$ {}_{n+1}r = \frac{{}_{n}r}{(4 - 3\,{}_{n}r^{2})^{\frac{1}{2}}} $$

$$ {}_{n+1}s = \frac{{}_{n}s}{(4 - 3\,{}_{n}s^{2})^{\frac{1}{2}}} $$

$$ {}_{n+1}t = \frac{[4 + 3\,{}_{n}t^{2} - 3\,{}_{n}t.\,({}_{n}t^{2} + 8)^{\frac{1}{2}}]\,\sqrt{2}}{[{}_{n}t - ({}_{n}t^{2} + 8)^{\frac{1}{2}}].\,[12 + 5\,{}_{n}t^{2} - 5\,{}_{n}t.\,({}_{n}t^{2} + 8)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} $$

dont les intégrales sont en y joignant la condition que $n = 0$ donne ${}_np = p$, ${}_nq = q$, ${}_nr = r$, ${}_ns = s$, ${}_nt = t$,

$$\left.\begin{aligned}
{}_np &= \frac{1 + p - (1 - 2p)\,4^n}{2\,(1 + p) + (1 - 2p)\,4^n} \\
{}_nq &= \frac{1 + 2q - (1 - q)\,4^n}{1 + 2q + 2\,(1 - q)\,4^n} \\
{}_nr &= \frac{r}{[(1 - r^2)\,4^n + r^2]^{\frac{1}{2}}} \\
{}_ns &= \frac{s}{[(1 - s^2)\,4^n + s^2]^{\frac{1}{2}}} \\
{}_nt &= \frac{\left\{[4 + 2t^2 - 2t.(t^2+8)^{\frac{1}{2}}]\,4^n - [4 - t^2 + t.(t^2+8)^{\frac{1}{2}}]\right\}\sqrt{2}}{\left\{[4 + 2t^2 - 2t.(t^2+8)^{\frac{1}{2}}]4^n + 2.[4 - t^2 + t.(t^2+8)^{\frac{1}{2}}]\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{2[4 + 2t^2 - 2t.(t^2+8)^{\frac{1}{2}}]4^n + 4 - t^2 + t.(t^2+8)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

n exprimant tous les nombres entiers depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et indiquant en général le nombre des formes comprises entre p et ${}_np$; lorsque n est négatif, ${}_np$ appartient à une forme dont p est le n^{me} dérivée, et lorsque n est positif ${}_np$ appartient à une forme qui est la n^{me} dérivée de p; d'où on tire en général les conséquences suivantes.

1°. Chaque série correspondante à un module particulier, p comprend un nombre indéfini de rhomboïdes, tous liés entre eux par une même loi.

2°. n étant compris entre $-\infty$ et $+\infty$, on peut faire $n = 0$ pour un terme quelconque de la série et choisir ce terme pour le module p, en sorte qu'il suffit de connoître un des rhomboïdes de la série pour les connoître tous.

3°. Si on a deux rhomboïdes différens dont les faces comprennent des angles ayant pour cosinus p, P, on con-

noîtra de suite s'ils appartiennent à une même série en établissant l'équation

$$P = \frac{(1+p).-(1-2p)\,4^x}{2\,(1+p).+(1-2p)\,)4^x}$$

ou

$$4^x = \frac{(1+p).(1-2P)}{(1+P).(1-2p)}$$

Si le second membre de cette équation, réduit à sa plus simple expression, n'est pas une puissance entière positive ou négative de 4, les deux rhomboïdes appartiennent à deux séries différentes. S'il est une puissance entière positive ou négative de 4, les deux rhomboïdes appartiennent nécessairement à la même série, car P est alors une dérivée ou une dérivante ${}_np$ de p, et il ne peut appartenir à aucune autre série, puisque toutes ses dérivées ${}_1P\ {}_2P\ {}_3P$ sont les dérivées ou les dérivantes ${}_{x+1}p\ {}_{x+2}p\ {}_{x+3}p$, etc.: de p.

Si on fait dans les équations $(f)\ n = -\infty$ on a

$$-_\infty p = \tfrac{1}{2},\quad -_\infty q = 1,\quad -_\infty r = 1,\quad -_\infty s = 1,\quad -_\infty t = 1$$

de même si on fait dans ces équations $n = \infty$ on a

$$_\infty p = -1,\quad _\infty q = -\tfrac{1}{2},\quad _\infty r = 0,\quad _\infty s = 0,\quad _\infty t = -1$$

résultats indépendans du module primitif p, en sorte que ces limites sont communes à toutes les séries de rhomboïdes.

Je ne m'étendrai pas quant à présent sur ce sujet, parce

que les formules qui précèdent suffisent aux recherches qui vont nous occuper. Les lois de la double réfraction nous conduiront à des résultats relatifs à la cristallisation, qui nous engageront à revenir sur les calculs que nous venons d'exposer.

[16] D'après les expériences [2], nous avons trouvé : angle (cos. $= p$) $= 105° 5' : p = -, 26022366$, d'où on tire, au moyen des équations (d) :

Angle (*cos.* $= p$) entre les faces du rhomboïde . .	$=$	$105° 5' 0''$
Supplément	$=$	$74° 55' 0''$
Angle (*cos.* $= q$) entre les arêtes	$=$	$101° 55' 0'' \frac{263}{998}$
Supplément	$=$	$78° 4' 59'' \frac{735}{998}$
Angle (*cos.* $= r$) entre les faces et l'axe	$=$	$45° 23' 25'' \frac{702}{1148}$
Supplément	$=$	$134° 36' 34'' \frac{22}{1148}$
Angle (*cos.* $= s$) entre les arêtes et l'axe	$=$	$66° 44' 45'' \frac{413}{417}$
Supplément	$=$	$113° 15' 14'' \frac{16}{417}$
Angle (*cos.* $= t$) entre les arêtes et les faces . . .	$=$	$119° 8' 11'' \frac{529}{607}$
Supplément	$=$	$70° 51' 48'' \frac{88}{607}$

Le premier de ces angles, qui est donné directement par l'expérience et duquel dérivent les autres, n'est susceptible d'exactitude qu'à environ dix secondes près, à cause des erreurs d'observations.

[17] J'appliquerai les recherches que je fais faire à la double réfraction du spath d'Islande. Je ferai voir dans les chapitres suivans que les résultats sont les mêmes pour les autres substances, en changeant la valeur des constantes qui entrent dans le calcul.

Je prendrai pour le plan des coordonnées rectangu-

laires x, y un plan parallèle à la face réfringente, et pour celui des x, z un plan parallèle à l'axe du cristal : soient de plus

θ, l'angle d'incidence compris entre le rayon incident et la normale à la surface réfringente ;

ϖ, l'angle compris entre l'axe des x et la projection du rayon incident sur le plan des x, y ;

λ, l'angle compris entre l'axe du cristal et la normale à la surface réfringente ;

Cela posé, x', y', z' étant les coordonnées du point d'incidence prises sur la surface du cristal dont l'équation est $z = z'$, les équations du rayon incident seront :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x'}{z - z'} &= tang.\ \theta.\ cos.\ \varpi \\ \frac{y - y'}{z - z'} &= tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Ainsi en nommant v la vitesse d'une molécule de lumière contenue dans ce rayon ; sa vitesse parallèlement aux trois axes des coordonnées sera

$$\left.\begin{aligned} v.\ \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} &= v.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi \\ v.\ \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} &= v.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi \\ v.\ \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} &= v.\ cos.\ \theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les molécules de lumière contenues dans le rayon incident se mouvant en ligne droite, on doit en conclure qu'elles n'éprouvent l'action du cristal qu'à une distance

insensible de la surface, et comme le rayon réfracté extraordinairement est également dirigé en ligne droite dans l'intérieur du cristal, il s'ensuit aussi que l'action des forces réfringentes ne s'étend intérieurement qu'à une distance insensible de la surface. Cette considération range les forces dont nous avons à calculer l'effet dans la classe de celles qui décroissent très-rapidement avec les distances, et qui ont cet avantage que leur influence totale entre seule dans les résultats du calcul; en sorte que la loi des phénomènes est indépendante de la fonction des distances suivant laquelle s'exerce leur action. Avant de déterminer la loi de la double réfraction, je vais exposer les relations générales qui existent nécessairement entre les directions de la lumière, les vitesses et les forces dans toutes les hypothèses de réfraction.

[18] Quelles que soient les forces qui produisent la réfraction extraordinaire, la somme des forces vives sera toujours au *minimum*; en sorte qu'en nommant u la vitesse de la lumière dans un point quelconque de sa trajectoire, on aura nécessairement pour toute l'étendue de cette courbe, $\int u^2 dt = minimum$, ou en représentant par δ le signe des variations

$$\delta . \int u^2 dt = \delta . \int u ds = \int . (u \delta ds + ds \delta u) = 0 \quad (1)$$

Or on a d'abord

$$u \delta ds = u . \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds} \quad (2)$$

En second lieu, on peut remarquer que, puisque l'in-

fluence des forces commence et finit à de petites distances de la surface, l'expression de la vitesse contient nécessairement une fonction de z, telle que l'influence du terme $\left(\frac{du}{dz}\right)$ s'étend à de très-petites distances. On voit aussi en examinant les phénomènes que j'ai décrits, qu'ils ne peuvent se rapporter à une force agissant suivant une direction constante. Mais, quelle que soit cette force, les directions $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ de la molécule de lumière varieront nécessairement avec la vitesse; en sorte que cette vitesse pourra toujours être considérée comme une fonction implicite des quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, z. Nommons θ' l'angle compris entre l'élément ds de la trajectoire et l'axe des z; ϖ' l'angle que la projection de l'élément ds sur la face $dz = 0$ fait avec la projection de l'axe du cristal sur le même plan. On aura

$$\frac{dx}{dz} = tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi'$$

$$\frac{dy}{dz} = tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi'$$

$$sin.\ \theta' = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ds}$$

$$sin.\ \varpi' = \frac{dy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les vitesses de la lumière en un point quelconque seront, donc fonctions des trois quantités θ', ϖ', z; en sorte que

$$\delta u = \left(\frac{du}{d\theta'}\right)\delta\theta' + \left(\frac{du}{d\varpi'}\right)\delta\varpi' + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z$$

Mais

$$\delta\theta' = \frac{\delta.\sin.\theta'}{\cos.\theta'} = \frac{ds}{dz}\,\delta.\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ds}$$
$$= \frac{dz.(dx\,\delta dx + dy\,\delta dy) - (dx^2+dy^2)\,\delta dz}{ds^2.(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\delta\varpi' = \frac{\delta.\sin.\varpi'}{\cos.\varpi'} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}\,\delta.\frac{dy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2+dy^2}$$

Substituant dans δu pour $\delta\theta'$, $\delta\varpi'$ leurs valeurs, on aura

$$ds\,\delta u = \left[\left(\frac{du}{d\theta'}\right).\cos.\varpi'.\cos.\theta' - \left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\sin.\varpi'}{\sin.\theta'}\right]\delta dx$$
$$+\left[\left(\frac{du}{d\theta'}\right).\sin.\varpi'.\cos.\theta' + \left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\cos.\varpi'}{\sin.\theta'}\right]\delta dy \quad (3)$$
$$-\left(\frac{du}{d\theta'}\right).\sin.\theta'\,\delta dz + ds.\left(\frac{du}{dz}\right)\delta z$$

Ajoutant ensemble les valeurs de, $u\,\delta ds$ et $ds\,\delta u$ tirées des équations (2), (3), et changeant le signe δd en $d\delta$, l'équation (1) deviendra

$$\int\left\{\frac{u\,dx}{ds} + \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\cos.\varpi'.\cos.\theta' - \left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\sin.\varpi'}{\sin.\theta'}\right\}d\delta x$$
$$+\int\left\{\frac{u\,dy}{ds} + \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\sin.\varpi'.\cos.\theta' + \left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\cos.\varpi'}{\sin.\theta'}\right\}d\delta y$$
$$+\int\left[\frac{u\,dz}{ds} - \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\sin.\theta'\right]d\delta z$$
$$+\int ds.\left(\frac{du}{ds}\right)\delta z \Bigg\} = 0$$

Si on intègre par parties, et si on égale séparément à zéro les coëfficiens des variations δx, δy, δz restés sous le signe intégral, on aura les trois équations

$$d.u\frac{dx}{ds} = d.\left[\left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\sin.\varpi'}{\sin.\theta'} - \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\cos.\varpi'.\cos.\theta'\right]$$

$$d.u\frac{dy}{ds} = -d.\left[\left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\cos.\varpi'}{\sin.\theta'} + \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\sin.\varpi'.\cos.\theta'\right]$$

$$d.u\frac{dz}{ds} = d.\left(\frac{du}{d\theta'}\right)\sin.\theta' + ds.\left(\frac{du}{dz}\right)$$

En intégrant les deux premières, et complétant les intégrales par la condition qu'au moment où commence l'action du cristal $u = v$, $\theta' = \theta$, $\varpi' = \varpi$

$$\left.\begin{aligned} u.\frac{dx}{ds} &= u.\sin.\theta'.\cos.\varpi' = v.\sin.\theta.\cos.\varpi \\ &\quad + \left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\sin.\varpi'}{\sin.\theta'} - \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\cos.\varpi'.\cos.\theta' \\ u.\frac{dy}{ds} &= u.\sin.\theta'.\sin.\varpi' = v.\sin.\theta.\cos.\varpi \\ &\quad - \left(\frac{du}{d\varpi'}\right).\frac{\cos.\varpi'}{\sin.\theta'} - \left(\frac{du}{d\theta'}\right).\sin.\varpi'.\cos.\theta' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

équations qui donneront la loi des vitesses quand celle de la réfraction sera connue ou réciproquement. Ces équations sont celles que M. Laplace a données pour toutes les hypothèses de réfraction, et auxquelles il est parvenu par une autre méthode.

Ici, comme dans la théorie de l'action capillaire, la connoissance des forces n'est pas nécessaire pour exprimer la loi des phénomènes, et les équations (4) considérées dans le rayon réfracté renferment toutes les condi-

tions nécessaires pour vérifier si les lois qu'on propose pour lier les phénomènes satisfont aux principes de la mécanique.

[19] On sait que dans la réfraction ordinaire la vitesse de la lumière réfractée est constante, quelle que soit la direction du rayon ; on a donc $\left(\frac{du}{d\theta'}\right) = 0, \left(\frac{du}{d\varpi}\right) = 0$, et par conséquent les équations (4) deviennent

$$u.\ sin.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = v.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi$$
$$u.\ sin.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = v.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi$$

On tire de ces équations

$$\left.\begin{aligned} tang.\ \varpi' &= tang.\ \varpi \\ u.\ sin.\ \theta' &= v.\ sin.\ \theta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Les équations (5) donnent alors la loi de la réfraction. La première indique que le rayon incident et le rayon réfracté sont dans un même plan perpendiculaire à la surface réfringente ; la seconde exprime que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est égal au rapport constant des vitesses avant et après la réfraction.

Si la loi de la réfraction étoit donnée on en concluroit de même la vitesse, car les équations (5) donnent

$$u.\ sin.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = v.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi$$
$$u.\ sin.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = v.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi$$

équations qui, étant comparées aux conditions (4)

changent celles-ci en $\left(\frac{du}{d\theta}\right) = 0, \left(\frac{du}{d\varpi}\right) = 0$. Donc la vitesse est constante et indépendante de la direction du rayon.

Si on fait dans les équations précédentes $\left(\frac{du}{d\theta}\right) = 0$, $\left(\frac{du}{d\varpi}\right) = 0$, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = u.\left(\frac{du}{dz}\right) = \Psi.(z). \quad (6)$$

par conséquent la réfraction ordinaire dépend uniquement d'une force perpendiculaire à la surface réfringente, d'où il est naturel de conclure qu'elle est due à la somme des attractions de toutes les molécules du corps. De plus, comme l'attraction de cette force s'étend à une distance insensible en dessus et en dessous de la surface réfringente, sa valeur prise dans l'étendue de la sphère d'activité sera égale à celle de l'intégrale $2\int dz\,\Psi$ prise, depuis $z = \infty$ jusqu'à $z = -\infty$. Nommons k^2 cette intégrale : $u^2 = v^2 + K^2$; donc dans la réfraction ordinaire, le Carré de la vitesse de la lumière est augmenté d'une quantité constante par l'action du corps diaphane. Si on intègre séparément les équations (6), on a

$$\frac{dx}{dt} = v.\,sin.\,\theta.\,cos.\,\varpi$$
$$\frac{dy}{dt} = v.\,sin.\,\theta.\,sin.\,\varpi$$
$$\frac{dz^2}{dt^2} = v^2.\,cos.^2\,\theta + k^2$$

en éliminant dt entre ces équations et en les intégrant, on a pour équations du rayon réfracté ordinairement

$$\frac{x-x'}{z-z'} = \frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{y-y'}{z-z'} = \frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (A)$$

[22] Appliquons actuellement à la réfraction extraordinaire du spath d'Islande les conditions générales de réfraction, en nous guidant sur la série d'expériences exposée dans le premier chapitre.

L'observation la plus simple est celle qui constate que la lumière, après avoir été réfractée extraordinairement dans un prisme de cristal d'Islande, revient dans l'air avec la vitesse qu'elle avoit avant la réfraction, quelle que soit l'inclinaison du rayon sur la face d'émergence. Sa vitesse dans l'intérieur du spath ne dépend donc pas de l'inclinaison du rayon réfracté sur les faces du prisme, et par conséquent elle dépend uniquement de sa direction par rapport à des lignes fixes dans l'intérieur du cristal.

Parmi toutes les lois que les physiciens ont proposées pour lier entre eux les phénomènes de la double réfraction, celle d'Huyghens satisfait seule à la condition que nous venons d'énoncer.

Après avoir expliqué les phénomènes de la réfraction ordinaire, en supposant que la lumière forme dans l'intérieur des corps diaphanes des ondulations sphériques, il imagina d'expliquer celles de la réfraction extraordinaire, en supposant que dans ce genre de réfraction les ondulations étoient elliptiques. La loi à laquelle il est parvenu dans cette hypothèse est parfaitement d'accord avec les phénomènes, comme je le le ferai voir dans les paragraphes suivans, et elle se trouve vérifiée par les

résultats de l'analyse dans l'hypothèse plus vraisemblable que ces modifications de la lumière sont dues à des forces attractives et répulsives.

[21] Voici la construction par laquelle Huyghens représente la réfraction extraordinaire, en supposant que les ondes lumineuses s'étendent suivant des ellypsoïdes de révolution dont les axes sont parallèles à celui du cristal. (*Fig.* 12.)

Concevons une des faces du cristal dans laquelle soit tracée l'ellipse HDE, dont le centre C est aussi celui de l'ellypsoïde HME que produit l'onde lumineuse et dont cette ellipse est une section. Soit de plus RC le rayon incident dont nous proposons de trouver la réfraction.

Menons par RC un plan perpendiculaire à celui de l'ellipse HDE et coupant ce dernier suivant la ligne BCK : ayant tracé ensuite dans le plan RCK, CO perpendiculaire à CR ; plaçons dans l'angle OCK, OK perpendiculaire à OC et égal à N que nous supposons être l'espace parcouru par la lumière dans l'air, tandis qu'elle s'étend dans le cristal suivant le sphéroïde $HDEM$. Dans le plan de l'ellipse HDE, menons par le point K, KT perpendiculaire à BCK. Si actuellement on conçoit un plan mené par la droite KT et tangent au sphéroïde HEM en I, la droite CI est le rayon réfracté correspondant à RC.

Pour vérifier cette construction par les résultats de l'expérience, il faut la traduire dans une expression analytique à laquelle on puisse appliquer directement les nombres.

Prenons pour le plan des x, y celui de la face HDE du cristal, et pour plan des x, z celui de la section principale CLM. Soit θ l'angle d'incidence : ϖ l'angle compris entre le plan d'incidence, RCK et celui des x, z.

λ, l'angle compris entre le plan des x, y et celui qui est perpendiculaire à l'axe du cristal ;

a, le grand axe du sphéroïde ;

b, l'axe de révolution passant par l'axe du cristal.

En supposant le point d'incidence c à l'origine des coordonnées, l'équation du sphéroïde sera

$$x^2.(a^2.\sin^2.\lambda + b^2\cos^2.\lambda) + z^2.(b^2.\sin^2.\lambda + a^2.\cos^2.\lambda) - 2xz.\sin.\lambda.\cos.\lambda.(a^2 - b^2) + b^2y^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

ou, en faisant $a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda = A$, $b^2.\sin^2.\lambda + a^2.\cos^2.\lambda = B$, $\sin.\lambda.\cos.\lambda.(a^2 - b^2) = C$,

$$Ax^2 + Bz^2 - 2Cxz + b^2y^2 = a^2b^2$$

Les équations du rayon incident seront

$$x.\cos.\theta = z.\sin.\theta.\cos.\varpi ; \quad y.\cos.\theta = z.\sin.\theta.\sin.\varpi$$

L'équation de la ligne CK est

$$y.\cos.\varpi = x.\sin.\varpi$$

Or, en nommant, x', y' les coordonnées du point K, on a par construction

$$CK = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{N}{\sin.\theta}$$

Donc

$$x' = \frac{N.\cos.\varpi}{\sin.\theta} ; \quad y' = \frac{N.\sin.\varpi}{\sin.\theta}$$

L'équation de la ligne KT perpendiculaire à CK sera

$$(x - x) \cos. \varpi + (y - y) \sin. \varpi = 0$$

et l'équation du plan passant par KT et tangent au sphéroïde,

$$(x - x). \cos. \varpi + (y - y). \sin. \varpi + Iz = 0$$

I étant un nombre qui doit être déterminé par la condition du contact.

Cette condition sera déterminée par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -\frac{Ax - Cz}{Bz - Cx} = -\frac{\cos. \varpi}{I} \\ \frac{dz}{dy} &= -\frac{b^2 y}{Bz - Cx} = -\frac{\sin. \varpi}{I} \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$b^2 y. \cos. \varpi = (Ax - Cz). \sin. \varpi \quad (2)$$

équation d'un plan qui contient le point de contact I, et qui, étant indépendant de l'angle θ, renferme la réfraction de tous les rayons incidens compris dans le plan $x \sin. \varpi = y \cos. \varpi$. Si actuellement on substitue dans l'expression du plan (a), la valeur de I donnée par la dernière des équations (b), on aura

$$(x - x) b^2 y. \cos. \varpi + (y - y) b^2 y. \sin. \varpi + (Bz - Cx) z. \sin. \varpi = 0. \quad (3)$$

Les trois équations (1), (2), (3) déterminent les coordonnées x, y, z du point de contact I, et les tangentes d'inclinaison $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ des projections du rayon réfracté;

mais comme les équations (1), (3) sont du second degré, il est avantageux de ne pas effectuer directement l'élimination des quantités x, y, z, afin de ne pas introduire des racines surabondantes. A cet effet nous observerons que l'équation (3) peut être mise sous la forme

$$xb^2y.\cos.\varpi + \sin.\varpi.(Bz^2 - Cxz + b^2y^2) = b^2y.(,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi)$$

Substituant dans le premier terme de cette équation à la place de $b^2 y \cos.\varpi$ sa valeur, $(A x - C z)\sin.\varpi$ tirée de l'équation (2), elle devient $\sin.\varpi\,(A x^2 + Bz^2 - 2Cxz + b^2y^2) = b^2y\,(,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi)$. Or le coëfficient de $\sin.\varpi$ est égal au premier membre de l'équation (1) et par conséquent égal à $a^2 b^2$: donc

$$y = \frac{a^2.\sin.\varpi}{,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi} \qquad (4)$$

Nous pouvons actuellement substituer l'équation (4) à l'équation (3), et on tire alors directement des équations (1), (2), (4), en observant que $AB - C^2 = a^2 b^2$

$$x = \frac{a^2b^2.\cos.\varpi + C[A.(,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi)^2 - a^2.(b^2.\cos^2.\varpi + A.\sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}{A.(,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi)}$$

$$y = \frac{a^2.\sin.\varpi}{,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi}$$

$$z = \frac{[A.(,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi)^2 - a^2.(b^2.\cos^2.\varpi + A.\sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}{,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi}$$

mais

$$,y.\sin.\varpi + ,x.\cos.\varpi = -\frac{N}{\sin.\theta}$$

Donc

$$\frac{x}{z} = \frac{a^2 b^2 . \sin.\theta . \cos.\varpi + C.[AN^2 - a^2 . \sin^2.\theta . (b^2 . \cos^2.\varpi + A . \sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}{A.[AN^2 - a^2 . \sin^2.\theta . (b^2 . \cos^2.\varpi + A . \sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{a^2 . \sin.\theta . \sin.\varpi}{[AN^2 - a^2 . \sin^2.\theta . (b^2 . \cos^2.\varpi + A \sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

[22] Enfin, si au lieu de supposer le point d'incidence à l'origine des coordonnées, on le transporte en un point dont les coordonnées sont x', y', z'; et si on substitue à A, B, C leurs valeurs, en faisant de plus $N = 1$, on aura pour équations du rayon réfracté extraordinaire

$$\frac{x-x'}{z-z'} = \frac{a^2 b^2 . \sin.\theta . \cos.\varpi}{(a^2 . \sin^2\lambda + b^2 . \cos^2.\lambda)\{a^2 . \sin^2.\lambda + b^2 . \cos^2.\lambda + a^2 . \sin^2.\theta . [b^2 . \cos^2.\varpi + (a^2 . \sin^2.\lambda + b^2 . \cos^2.\lambda) . \sin^2.\varpi}$$

$$+ \frac{\sin.\lambda . \cos.\lambda . (a^2 - b^2)}{a^2 . \sin^2.\lambda + b^2 . \cos^2.\lambda}$$

$$\frac{y-y'}{z-z'} = \frac{a^2 . \sin.\theta . \sin.\varpi}{\{a^2 . \sin^2.\lambda + b^2 . \cos^2.\lambda - a^2 . \sin^2.\theta . [b^2 . \cos^2.\varpi + (a^2 . \sin^2.\lambda + b^2 . \cos^2\lambda) . \sin^2.\varpi]\}^{\frac{1}{2}}}$$

a et b étant deux constantes. Lorsqu'on considère la réfraction sur une face artificielle parallèle à l'axe du cristal et dans un plan perpendiculaire à cet axe, la réfraction extraordinaire a lieu suivant une loi analogue à celle de la réfraction ordinaire, c'est-à-dire que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est constant et égal à a. La constante b représente le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence dans la réfraction ordinaire. D'après cette définition des constantes a et b, on voit qu'elles peuvent l'une et l'autre être calculées par des observations analogues à celles qui servent à déterminer le rapport constant dans la réfraction ordinaire.

Si on fait dans les équations du rayon réfracté extraordinairement

$$\alpha = \frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi + \sin.\lambda.\cos.\lambda.(a^2-b^2).\left\{a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda - a^2.\sin^2.\theta.[b^2.\cos^2.\varpi + (a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda).\sin^2.\varpi]\right\}^{\frac{1}{2}}}{a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda}$$

$$\beta = a^2.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi$$

$$\gamma = \left\{a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda - a^2.\sin^2.\theta.\,[b^2.\cos^2.\varpi + (a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda).\sin^2.\varpi]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ses différentielles deviendront

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\alpha}{\gamma}; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\beta}{\gamma}$$

et l'expression des vitesses parallèlement aux axes des coordonnées sera

$$\frac{dx}{dt} = \alpha I, \quad \frac{dy}{dt} = \beta I; \quad \frac{dz}{dt} = \gamma I \qquad (5)$$

I étant une fonction arbitraire des angles θ, ϖ, λ. En effet, quelque soit I, le système des vitesses (5) satisfera toujours à la loi de réfraction exprimée par les équations (A'), en sorte que les données précédentes suffiroient pour calculer d'avance tous les phénomènes; mais parmi toutes les valeurs de I, une seule satisfait aux conditions générales de la mécanique représentée par les équations (4) du paragraphe [18]. En sorte que pour résoudre complètement la question, il est nécessaire de déterminer la fonction I afin d'avoir la valeur du carré de la vitesse.

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, I^2 \qquad (6)$$

Or si, comme nous l'avons fait précédemment, on nomme θ', ϖ' pour le rayon réfracté extraordinairement,

les angles correspondans à θ, ϖ dans le rayon incident, on aura

$$tang.\theta'.cos.\varpi' = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a^2b^2.sin.\theta.cos.\varpi}{A.[A-a^2.sin^2.\theta.(b^2.cos^2.\varpi+A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A} \quad (7)$$

$$tang.\theta'.sin.\varpi' = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a^2.sin.\theta.sin.\varpi}{[A-a^2.sin^2.\theta\ (b^2.cos^2.\varpi+A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (8)$$

On tire directement de l'équation (7)

$$sin^2.\theta.cos^2.\varpi = \frac{A.(A.tang.\theta'.cos.\varpi'-C)^2}{a^4b^4+a^2.(b^2+A.tang^2.\varpi).(A.tang.\theta'.cos.\varpi'-C)^2}. \quad (9)$$

et par conséquent

$$sin^2.\theta.sin^2.\varpi = \frac{A.tang^2.\varpi.(A.tang.\varpi'.cos.\varpi'-C)^2}{a^4b^4+a^2.(b^2+A.tang^2.\varpi).(A.tang.\theta'.cos.\varpi'-C)^2}. \quad (10)$$

De plus, en divisant l'équation (8) par l'équation (7),

$$tang.\ \varpi = \frac{b^2.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi'}{A.\ tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi'-C}$$

Substituant cette valeur de tang. ϖ dans les équations (9) et (10), elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} sin^2.\theta.cos^2.\varpi &= \frac{(A.sin.\theta'.cos.\varpi'-C.cos.\theta')^2}{a^2b^4+a^2b^2.(a^2-b^2).(cos.\lambda.cos.\theta'-sin.\lambda.sin.\theta'.cos.\varpi')^2} \\ sin^2.\theta.sin^2.\varpi &= \frac{b^4.sin^2.\theta'.sin^2.\varpi'}{a^2b^4+a^2b^2.(a^2-b^2).(cos.\lambda.cos.\theta'-sin.\lambda.sin.\theta'.cos.\varpi')^2} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Mais $[cos.\lambda\ cos.\theta' - sin.\lambda\ sin.\theta'\ cos.\varpi']$ est le cosinus de l'angle μ compris entre le rayon réfracté et l'axe du cristal dont les équations sont $y = 0$, $x = z.\ tang.\ \lambda$. Donc

$$\left.\begin{aligned} \cos.\mu &= \cos.\lambda.\cos.\theta' - \sin.\lambda.\sin.\theta'.\cos.\varpi' \\ \sin.\theta.\cos.\varpi &= \frac{A.\sin.\theta'.\cos.\varpi' - C.\cos.\theta'}{ab.(b^2.\sin^2.\mu + a^2.\cos^2.\mu)^{\frac{1}{2}}} \\ \sin.\theta.\sin.\varpi &= \frac{b^2.\sin.\theta'.\sin.\varpi'}{ab.(b^2.\sin^2\mu + a^2.\cos^2.\mu)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Or les équations (4) du paragraphe [18] qui expriment les conditions générales de la réfraction peuvent être mises sous la forme

$$\left(\frac{du}{d\varpi}\right) = v.\sin.\theta'.(\cos.\varpi'.\sin.\theta\sin.\varpi - \sin.\varpi'.\sin.\theta.\cos.\varpi)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta'}\right) = \frac{v}{\cos.\theta'}.(\cos.\varpi'.\sin.\theta\cos\varpi + \sin.\varpi'.\sin.\theta.\sin.\varpi) - u.\,tang.\,\theta'$$

Si on fait $v = 1$, et si l'on y substitue pour $\sin.\theta.\cos.\varpi$, $\sin.\theta.\sin.\varpi$ leurs valeurs,

$$\left(\frac{du}{d\varpi}\right) = \frac{(a^2 - b^2).\sin.\lambda.\sin.\theta'\sin.\varpi'.\cos.\mu}{ab.(b^2.\sin^2.\mu + a^2.\cos^2.\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta'}\right) = -\frac{(a^2 - b^2).(\cos.\lambda.\sin.\theta' + \sin.\lambda.\cos.\theta'.\cos.\varpi').\cos.\mu}{ab.(b^2.\sin^2.\mu + a^2.\cos^2\mu)^{\frac{1}{2}}} + \left[\frac{(b^2.\sin^2.\mu + a^2.\cos^2.\mu)^{\frac{1}{2}}}{ab} - u\right].\,tang.\,\theta'$$

Or, en mettant ces expressions dans l'équation

$$du = \left(\frac{du}{d\theta'}\right)d\theta' + \left(\frac{du}{d\varpi'}\right)d\varpi'$$

et observant que

$$\sin.\lambda.\sin.\theta'.\sin.\varpi' = \left(\frac{d.\cos.\mu}{d\varpi'}\right)$$

$$\cos.\lambda.\sin.\theta' + \sin.\lambda.\cos.\theta'.\cos.\varpi' = -\left(\frac{d.\cos.\mu}{d\theta'}\right)$$

$$du = \frac{d.(b^2.\sin^2.\mu + a^2.\cos^2.\mu)^{\frac{1}{2}}}{ab} + \left[\frac{(b^2.\sin^2.\mu + a^2.\cos^2.\mu)^{\frac{1}{2}}}{ab} - u\right].\,tang.\,\theta'.\,d\theta'$$

équation dont l'intégrale est

$$u = \frac{(b^2 . \sin^2 . \mu + a^2 . \cos^2 . \mu)^{\frac{1}{2}}}{ab} + G . \cos . \theta'$$

G étant une constante arbitraire, mais nous avons vu, dans le paragraphe [20], que la vitesse u ne dépend que de la direction du rayon par rapport à des lignes fixes dans l'intérieur du cristal; elle ne peut donc être fonction que de l'angle μ, et pour remplir cette condition, il faut que $G = 0$. Donc

$$u = \frac{(b^2 . \sin^2 . \mu + a^2 . \cos^2 . \mu)^{\frac{1}{2}}}{ab} \qquad (13)$$

Comparant ensemble les équations (6) et (13), et remarquant que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 . \sin^2 . \mu + a^2 . \cos^2 . \mu}$$

on aura

$$u = \frac{(b^2 . \sin^2 . \mu + a^2 . \cos^2 . \mu)^{\frac{1}{2}}}{ab} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} I$$

$$= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En substituant cette valeur de I dans les équations (5),

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\beta}{\alpha^2 + b^2 + \gamma^2} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Si on suppose dans ces équations $a^2 - b^2 = \sigma$, elles deviennent

$$\frac{dx}{dt} = sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi$$
$$\frac{dy}{dt} = sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi$$
$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{1}{b^2} - sin^2.\ \theta$$

équations qui expriment les vitesses dans le rayon réfracté ordinaire en représentant $1 + k^2$ par $\frac{1}{b^2}$.

Les équations (14) peuvent être mises sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi - \frac{sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi.\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi - \frac{sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi.\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$
$$\frac{dz^2}{dt^2} = cos^2.\ \theta + k^2 - \frac{(1 - b^2.\ sin^2.\ \theta).\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - b^2\gamma^2}{b^2.\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}$$

les derniers termes étant tels qu'ils s'évanouissent lorsque $a^2 - b^2 = 0$ et par conséquent les seuls qui appartiennent aux forces qui produisent la réfraction extraordinaire.

[23] La quantité $\frac{ab}{(b^2.\ sin^2.\ \mu + a^2.\ cos^2.\ \mu)^{\frac{1}{2}}}$ est l'expression du rayon de l'ellipsoïde dans la construction d'Huyghens ; donc dans la loi qui s'en déduit la vitesse de la lumière est en raison inverse du rayon variable de cet ellipsoïde.

L'équation (13) pouvant être mise sous la forme

$$u^2 = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right) sin^2.\ \mu$$

et le carré de la vitesse de la lumière dans le rayon réfracté ordinairement étant $\frac{1}{b^2}$, on voit qu'en vertu de la force qui produit la réfraction extraordinaire, le carré de la vitesse est diminué d'une quantité $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\right).\,sin^2.\,\mu$, μ étant l'angle compris entre le rayon réfracté extraordinairement et l'axe du cristal, ce qui indique que dans tous tous les cas cet effet extraordinaire est dû à une force répulsive.

[24] Commençons par considérer la réfraction sur une des faces naturelles du cristal : supposons de plus $\varpi = 0$, afin d'avoir d'abord la loi de la réfraction dans la section principale. Les équations du rayon incident seront

$$x - x' = (z - z').\,tang.\,\theta\,;\quad y - y' = 0 \qquad (a)$$

Celles du rayon réfracté ordinaire

$$x - x' = (z - z').\,\frac{sin.\,\theta}{(cos^2.\,\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}\,;\quad y - y' = 0 \qquad (A)$$

et enfin celles du rayon réfracté extraordinaire

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{a^2\,b^2.\,sin.\,\theta}{(a^2.\,sin^2.\,\lambda + b^2.\,cos^2.\,\lambda^2).\,(a^2.\,sin^2.\,\lambda + b^2.\,cos^2.\,\lambda - a^2\,b^2.\,sin^2.\,\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{sin.\,\lambda.\,cos.\,\lambda.\,(a^2 - b^2)}{a^2.\,sin^2.\,\lambda + b^2.\,cos^2.\,\lambda}\,;\quad y - y' = 0 \qquad (A')$$

Comme le rayon réfracté extraordinairement ne sort pas du plan d'incidence $y = y'$, nous prendrons ce plan pour celui des x, z, en faisant $y' = 0$. Nous supposerons

de plus que le cristal soit posé sur le plan des x, y, en sorte que z' représentera sa hauteur. Nommons x'' la coordonnée du point où l'axe des x est rencontré par le rayon réfracté ordinaire ; x''' la coordonnée du point où le même axe est rencontré par le rayon réfracté extraordinaire, on aura

$$\frac{x' - x''}{z'} = \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{x' - x'''}{z'} = \frac{a^2 b^2 . \sin.\theta}{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda).(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda - a^2 b^2.\sin^2.\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin.\lambda.\cos.\lambda.(a^2 - b^2)}{a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda}$$

$$\frac{x'' - x'''}{z'} = \frac{a^2 b^2 . \sin.\theta}{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda).(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda - a^2 b^2.\sin^2.\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin.\lambda.\cos.\lambda.(a^2 - b^2)}{a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Enfin si on représente par (e) la valeur de $\frac{x'' - x'''}{z'}$ relative à une valeur positive de θ, et par $[e]$ la valeur de $\frac{x'' - x'''}{z'}$ relative à la même valeur de θ prise négativement, on aura

$$\frac{(e) + [e]}{2} = \frac{\sin.\lambda.\cos.\lambda.(a^2 - b^2)}{a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda}$$

$$\frac{(e) - [e]}{2} = \frac{a^2 b^2 . \sin.\theta}{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda).(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda - a^2 b^2.\sin^2.\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda)^2}{a^4 b^4}.(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda - a^2 b^2.\sin^2.\theta) = \frac{\sin^2.\theta}{\left[\frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(e) - [e]}{2}\right]^2}$$

D'après les expériences [6], dans lesquelles j'ai observé directement les valeurs $x'' - x''' = (e)\,z'$, $x'' - x''' = [e]\,z'$ sur un cristal dont l'épaisseur $z' = 0^{m}03389074$, on a

θ.	$(e)\,z'$.	$[e]\,z'$.	$\frac{(e)-[e]}{2}$.	$\frac{(e)+[e]}{2}$.
10°	$0^{m}00384$	$0^{m}00349$	0.00516365	0.1081416
20	0.00404	0.00331	0.0107699	0.1084366
30	0.00426	0.003065	0.01763018	0.1080678
45	0.00468	0.00265	0.0299492	0.1081416
60	0.00518	0.00218	0.044259..	0.1085842

La moyenne des valeurs de $\frac{(e)+[e]}{2}$ est 0.10827436: mais les expériences [5] faites sous l'angle $\theta = 0$ donnent pour la même valeur le nombre moyen 1087745; en sorte que nous supposerons $\frac{(e)+[e]}{2} = \frac{0.10827436 + 0.1087745}{2}$ $= 0.10852443$. On aura ainsi pour première équation entre les valeurs de a et de b,

$$\frac{sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda.\ (a^2 - b^2)}{a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda} = 0.10852443$$

d'où l'on tire

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda + cos^2.\ \lambda.\ (0.10852443)}{sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda - sin^2.\ \lambda.\ (0.10852443)}$$

Nous avons trouvé que l'angle compris entre l'axe du cristal et ses faces naturelles étoit de 45° 23′ 25 $\frac{192}{214}$.

Ainsi l'angle λ compris entre l'axe et la normale à la face, sera

$$\lambda = 44^\circ\ 36'\ 34''\ \tfrac{22}{214}$$
$$\textit{log. sin.}\ \lambda = 9.84650458$$
$$\textit{log. cos.}\ \lambda = 9.85242507$$

en sorte qu'on aura.

$$\frac{a}{b} = 1.1149408$$

Si on eût employé pour $\frac{(e)+[e]}{2}$ le nombre .1091743 2 provenant des expériences [8] faites dans un plan perpendiculaire à celui de la section principale, on auroit eu

$$\frac{a}{b} = 1.1156718$$

Enfin, en employant pour $\frac{(e)+[e]}{2}$ le nombre .1087745 provenant des expériences [5] faites sous l'angle $\theta = 0$, on a

$$\frac{a}{b} = 1.1152223$$

Nous prendrons une moyenne entre ces trois valeurs de $\frac{a}{b}$, en sorte que les expériences [5] qui sont les plus susceptibles d'exactitude, influeront doublement dans le résultat qui sera enfin

$$\frac{a}{b} = 1.1152783$$

Les valeurs de $\frac{(e)-[e]}{2}$ donnent les cinq équations

suivantes, en observant que d'après les expériences [4]

$$k^2 = 1.743427 = \frac{1}{b^2} - 1,$$

$$\theta = 10^\circ \ldots \frac{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda)^2}{a^2 b^2}.\left(\frac{\sin^2.\lambda}{b^2} + \frac{\cos^2.\lambda}{a^2} - \sin^2.\theta\right) = 2.46580612$$

$$\theta = 20^\circ \ldots = 2.37759333$$

$$\theta = 30^\circ \ldots = 2.237350..$$

$$\theta = 45^\circ \ldots = 2.98375000$$

$$\theta = 60^\circ \ldots = 1.734140..$$

Or en prenant $\frac{a}{b} = 1.1152783$, on a

$$\frac{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda)^2}{a^2 b^2} = 1.008955$$

$$\frac{\sin^2.\lambda}{b^2} + \frac{\cos^2.\lambda}{a^2} = \frac{2.46580612}{1.008955..} + \sin^2.10^\circ = 2.473074.$$

$$\frac{2.37759333}{1.008955..} + \sin^2.20^\circ = 2.4734684$$

$$\frac{2.237350..}{1.008955..} + \sin^2.30^\circ = 2.467492.$$

$$\frac{1.98375000}{1.008955..} + \sin^2.45^\circ = 2.4661433$$

$$\frac{1.734140..}{1.008955..} + \sin^2.60^\circ = 2.468748.$$

Valeur moyenne . . . . . = 2.46978514

Cette dernière équation jointe à la valeur de $\frac{a}{b}$, donne

$$a^2 = \frac{(1.1152783)^2.\sin^2.\lambda + \cos^2.\lambda}{2.46978514}$$

$$b^2 = \frac{\sin^2.\lambda + \frac{\cos^2.\lambda}{(1.1152783)^2}}{2.46978514}$$

et enfin

$$a = 0.673488828; \quad b = 0.6038741\overline{7}$$

[25] Cherchons actuellement la loi de la réfraction dans le plan perpendiculaire à la section principale. Il faudra supposer $\varpi = 90^\circ$ dans les équations générales [22]; alors les équations du rayon incident seront

$$x - x' = 0; \quad y - y' = (z - z').\ tang.\ \theta. \qquad (a)$$

celles du rayon réfracté ordinaire,

$$x - x' = 0; \quad y - y' = (z - z').\frac{sin.\ \theta}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (A)$$

et enfin celles du rayon réfracté extraordinairement,

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= (z - z').\frac{sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda.\ (a^2 - b^2)}{a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda} \\ y - y' &= (z - z').\frac{a^2.\ sin.\ \theta}{(a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda)^{\frac{1}{2}}.\ (1 - a^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (A')$$

Nous supposerons, comme dans le cas précédent, que le cristal est posé sur le plan des x, y, en sorte que z' exprime sa hauteur. Nommons x'', y'' la coordonnée du point où le rayon réfracté ordinaire traverse le plan des x, y et x''', y''' les coordonnées du point où le rayon réfracté extraordinaire rencontre le même plan, on aura

$$x' - x'' = 0; \quad \frac{y' - y''}{z'} = \frac{sin.\ \theta}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{x' - x'''}{z'} = \frac{sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda.\ (a^2 - b^2)}{a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda}$$

$$\frac{y' - y'''}{z'} = \frac{a^2.\ sin.\ \theta}{(a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda)^{\frac{1}{2}}.\ (1 - a^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{x'' - x'''}{z'} = \frac{sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda.\ (a^2 - b^2)}{a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda}$$

$$\frac{y'' - y'''}{z'} = \frac{a^2.\ sin.\ \theta}{(a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda)^{\frac{1}{2}}.\ (1 - a^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{sin.\ \theta}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et enfin, en représentant par e la quantité $\frac{x'' - x'''}{z'}$, par f la quantité $\frac{y'' - y'''}{z'}$,

$$\frac{a^2 . \sin^2 . \lambda + b^2 . \cos^2 . \lambda}{a^2} . \left(\frac{1}{a^2} - \sin^2 . \theta\right) = \frac{\sin^2 . \theta}{\left(\frac{\sin . \theta}{(\cos^2 . \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}} + f\right)^2}$$

Les quantités $x'' - x''' = ez'$, $y'' - y''' = fz'$ ont été observées sur un cristal dont l'épaisseur $z' = 0.03389074$;

θ.	ez'	e.	fz'.	f.
10	0.0037.	0.10917432	0.000660	0.01947434
20	0.00367	. . . . .	0.001350	0.03983387
30	0.0037.	0.10917432	0 002062	0.06084255
40	0.00375	. . . . .	0.002862	0.0844478.
50	0.0037.	0.10917432	0.00391 $\frac{1}{3}$	0.11556728

Les valeurs de f donnent les cinq équations

$$\theta = 10. \frac{a^2 . \sin^2 . \lambda + b^2 . \cos^2 . \lambda}{a^2} . \left(\frac{1}{a^2} - \sin^2 . \theta\right) = 1.933100.$$
$$\theta = 20 . \ldots = 1.8586135$$
$$\theta = 30 . \ldots = 1.7544335$$
$$\theta = 40 . \ldots = 1.616754.$$
$$\theta = 50 . \ldots = 1.4452923$$

Or, en prenant $\frac{a}{b} = 1.1152783$, on a

$$\frac{a^2 . \sin^2 . \lambda + b^2 . \cos^2 . \lambda}{a^2} = 0.90064243$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1.933100.}{0.90064243} + \sin^2.10 = 2.176510.$$
$$= \frac{1.8586135}{0.90064243} + \sin^2.20 = 2.1806302$$
$$= \frac{1.7544335}{0.90064243} + \sin^2.30 = 2.1979796$$
$$= \frac{1.616754.}{0.90064243} + \sin^2.40 = 2.208288.$$
$$= \frac{1.4452928}{0.90064243} + \sin^2.50 = 2.191559.$$

Valeur moyenne . . . $= 2.1909934$

d'où l'on tire

$$a = \frac{1}{(2.1909934)^{\frac{1}{2}}}$$

$$a = 0.675584000\,; \quad b = 0.605753483$$

[26] Si on fait dans les équations générales [22] $\lambda = 0$, la face du cristal sera perpendiculaire à l'axe, et alors les équations du rayon incident seront

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= (z - z').\ tang.\ \theta.\ cos.\ \varpi \\ y - y' &= (z - z').\ tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

celles du rayon réfracté ordinaire,

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= (z - z')\ \frac{sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}} \\ y - y' &= (z - z')\ \frac{sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

et enfin celles du rayon réfracté extraordinaire,

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= (z - z')\ \frac{a^2.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{b.\ (1 - a^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ y - y' &= (z - z')\ \frac{a^2.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{b.\ (1 - a^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (A')$$

On voit par les équations (a) (A) (A'); 1°. que le rayon

incident et les deux rayons réfractés sont toujours dans un même plan $(x - x')\,sin.\,\varpi = (y - y')\,cos.\,\varpi$; 2°. que l'angle d'incidence θ étant le même, les angles de réfraction ordinaire et extraordinaire sont aussi les mêmes et indépendans de l'angle ϖ. On pourra donc en considérant l'incidence dans un plan quelconque supposer l'angle $\varpi = 0$. Imaginons que le cristal soit posé sur le plan des x, y, en sorte que z' représente sa hauteur; nommons x'' la coordonnée du point où le rayon réfracté ordinaire coupe le plan des x, y; x''' la coordonnée du point où le rayon réfracté extraordinaire coupe le même plan, on aura

$$\frac{x' - x''}{z'} = \frac{sin.\,\theta}{(cos^2\,\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(x' - x''')}{z'} = \frac{a^2.\,sin.\,\theta}{b.\,(1 - a^2.\,sin^2.\,\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{x'' - x'''}{z'} = \frac{a^2.\,sin.\,\theta}{b.\,(1 - a^2.\,sin^2.\,\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{sin.\,\theta}{(cos^2.\,\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

enfin, en représentant par e la quantité $\frac{(x'' - x''')}{z'}$,

$$\frac{b^2}{a^2}.\left(\frac{1}{a^2} - sin^2.\,\theta\right) = \frac{sin^2.\,\theta}{\left(\frac{sin.\,\theta}{(cos^2.\,\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}} + e\right)^2}$$

Les quantités $x'' - x''' = e\,z'$ ont été observées [9] sur un cristal dont l'épaisseur $z' = 0^m,03012\,5$.

θ.	ez'	e.
10°	$0^m00081\frac{2}{3}$	0.027109264.
15	0.00119.	0.039502069.
20	0.001600	0.053112022[5]
25	0.00202.	0.067053924.
30	$0.00246\frac{1}{3}$	0.081881028.
35	0.00289.	0.095933588.
40	$0.00349\frac{1}{3}$	0.116071847.

Les valeurs de e fournissent les sept équations

$$\theta = 10°.\ \frac{b^2}{a^2}.\left(\frac{1}{a^2} - \sin^2.\theta\right) = 1.7167864$$
$$= 15\ldots\ldots\ldots = 1.713770.$$
$$= 20\ldots\ldots\ldots = 1.676455.$$
$$= 25\ldots\ldots\ldots = 1.6307715$$
$$= 30\ldots\ldots\ldots = 1.574086.$$
$$= 35\ldots\ldots\ldots = 1.521076.$$
$$= 40\ldots\ldots\ldots = 1.431986.$$

et en prenant pour $\frac{b^2}{a^2}$ le nombre 0.8039575 répondant à $\frac{a}{b} = 1.1152783$, on aura

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1.7167864}{0.8039575} + \sin^2.\ 10° = 2.1655734$$
$$= \frac{1.713770.}{0.8039575} + \sin^2.\ 15 = 2.198654.$$
$$= \frac{1.676455.}{0.8039575} + \sin^2.\ 20 = 2.2022311$$
$$= \frac{1.6307715}{0.8039575} + \sin^2.\ 25 = 2.2070365$$
$$= \frac{1.574086.}{0.8039575} + \sin^2.\ 30 = 2.2079225$$
$$= \frac{1.521076.}{0.8039575} + \sin^2.\ 35 = 2.2209750$$
$$= \frac{1.431986.}{0.8039575} + \sin^2.\ 40 = 2.1943473$$
$$\text{Moyenne}\ldots = 2.1995345$$

d'où on tire

$$a = 0.674271.15; \quad b = 0.60457635$$

[27] D'après les expériences [4] sur la réfraction simple, nous avons trouvé $k^2 = 1.743427$, et par conséquent $b = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{(2,743427)^{\frac{1}{2}}}$. Or, en prenant $\frac{a}{b} = 1.1152783$, on en conclura

$$a = 0.67334338; \quad b = 0.603744420$$

Ainsi les valeurs de a et b seront

D'après les observations sur une face naturelle dans le plan de la section principale	$a = 0.6734882\delta.$	$b = 0.60387417$
D'après les observations sur une face naturelle dans un plan perpendiculaire à la section principale	$a = 0.67558400.$	$b = 0.60575348$
D'après les observations sur une face perpendiculaire à l'axe et dans un plan quelconque . . .	$a = 0.67427115.$	$b = 0.60457635$
D'après les observations sur les prismes et le rapport de a à b donné par les observations précédentes . .	$a = 0.67334338.$	$b = 0.60374442$
Moyenne	0.674171702	0.604487105

Je vais actuellement comparer les réfractions observées avec les réfractions calculées, en prenant pour a et b leurs moindres valeurs. Je n'emploierai pas dans cette

comparaison les valeurs moyennes afin d'obtenir des différences plus sensibles et qui indiquent la limite des erreurs.

[28] *Comparaison des réfractions observées et des réfractions calculées dans la supposition de*

$$a = 0.67334338; \quad b = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = 0.60374442$$

Je nomme z' la hauteur du cristal, e la différence des tangentes de réfraction des deux rayons ordinaire et extraordinaire projetés sur le plan des x, z; f la quantité analogue mesurée dans le plan des y, z; les distances ez', fz' ont été mesurées directement en prenant le mètre pour unité.

Réfraction sur une face naturelle dans le plan de la section principale

$$\lambda = 44^\circ 36' 34'' \tfrac{22}{214}; \quad \varpi = 0; \quad z' = 0^m 03389074$$

$$e = \frac{a^2 b^2 . \sin . \theta}{(a^2 . \sin^2 . \lambda + b^2 . \cos^2 . \lambda) . (a^2 . \sin^2 . \lambda + b^2 . \cos^2 . \lambda - a^2 b^2 . \sin^2 . \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{\sin . \lambda . \cos . \lambda . (a^2 - b^2)}{a^2 . \sin^2 . \lambda + b^2 . \cos^2 . \lambda} - \frac{\sin . \theta}{(\cos . \theta + k^2)}$$

$$= 0.9955522 . \frac{\sin . \theta}{(2.4708483 - \sin^2 . \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{\sin . \theta}{(\cos^2 . \theta + 1.743427)^{\frac{1}{2}}} + 0.1088245$$

θ.	ez' Observé.	ez' Calculé.	Différences.
+ 10	0^m00384	0.0038645	— 0.0000255
+ 20	0.00404	0.0040573	— 0.0000173
+ 30	0.00426	0.0042770	— 0.0000170
+ 45	0.00468	0.0046828	— 0.0000028
+ 60	0.00518	0.0051746	+ 0.0000054
0	0.00368645	0.0036881	— 0.0000017
— 10	0.00349	0.0035107	— 0.0000207
— 20	0.00331	0.0033189	— 0.0000089
— 30	0.003065	0.0030992	— 0.0000342
— 45	0.00265	0.0026934	— 0.0000434
— 60	0.00218	0.0022017	— 0.0000217

Réfraction sur une face naturelle dans le plan perpendiculaire à la section principale

$$\lambda = 44^\circ\,31'\,34''\,\tfrac{22}{214}\,;\quad \varpi = 90^\circ;\quad z' = 0.3389074$$

$$f = \frac{a^2.\sin.\theta}{(a^2.\sin^2.\lambda + b^2.\cos^2.\lambda)^{\frac{1}{2}}.(1 - a^2.\sin^2.\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1.053716.\frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + 1.20560)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + 1.73427)^{\frac{1}{2}}}$$

θ.	fz' Observé.	fz' Calculé.	Différences.
10°	$0^m000660$	0.0006316	+ $0^m0000284$
20	0.001350	0.0012990	+ 0.0000510
30	0.002062	0.0020370	+ 0.0000250
40	0.002862	0.0028748	— 0.0000128
50	0.003911/3	0.0038226	+ 0.0000940

Réfraction sur une face perpendiculaire à l'axe $\lambda = 0$.

La réfraction sur cette face est indépendante des valeurs de ϖ; en sorte que nous supposerons $\varpi = 0$, afin de la considérer seulement dans le plan des xz.

$$z' = 0^{m}030125$$

$$e = \frac{a^2 . \sin.\theta}{b . (1 - a^2 . \sin^2.\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1.1152783 . \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + 1.20560)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + 1.743427)^{\frac{1}{2}}}$$

θ.	ez'		Différences.
	Observé.	Calculé.	
10.	0.0008$1\frac{2}{3}$	0.00077976	+ 0.0000369
20	0.001600	0.0015936	+ 0.0000064
30	0.0024$6\frac{4}{5}$	0.0024738	— 0.0000072
40	0.0034$9\frac{2}{5}$	0.0034457	+ 0.0000509

Réfraction sur une face parallèle à l'axe dans un plan d'incidence perpendiculaire à l'axe. $\lambda = 90$. $\varpi = 90°$,

$$f = \frac{\sin.\theta}{\left(\frac{1}{a^2} - \sin^2.\theta\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.\theta}{(\cos^2.\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Les expériences faites sur un cristal dont l'épaisseur $z' = 0.0338$.

θ.	fz'		Différences.
	Vérifié.	Calculé.	
10	0.00043	0.0004 1615	+ 0.00001385
20	0.00086	0.0008 6586	— 0.00000586
30	0.00137	0.0013 8240	— 0.00001240
40	0.00198	0.0019 9540	— 0.00001540
50	0.00270	0.0027 1920	— 0.00001920

J'ai d'abord été étonné de ce que dans ces différens résultats les erreurs marchassent presque toutes dans le même sens; mais on trouve la véritable cause de ces différences dans les feuillets inévitables des faces naturelles, et lorsqu'il s'agit de surfaces artificielles polies dans la difficulté de former des plans exacts, et surtout dans l'impossibilité d'obtenir un parallélisme parfait entre les faces opposées; ces différences d'ailleurs ne portent que sur les centièmes du millimètre qui ne peuvent qu'être estimés, et sont renfermées dans les limites des erreurs que comporte ce genre d'observations.

[29] Si, dans les équations générales [22], on fait $\lambda = 90$, $cos.\ \lambda = 0$. $sin.\ \lambda = 1$, la face du cristal sera parallèle à l'axe, et on aura pour équations du rayon réfracté extraordinairement

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{b^2.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{[a^2 - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + a^2.\ sin^2.\ \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{y - y'}{z - z'} = \frac{a.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{[1 - sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + a^2.\ sin^2.\ \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

Soit $\varpi = 0$, $cos.\ \varpi = 1$, $sin.\ \varpi = 0$,

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{b.\ sin.\ \theta}{a.\left(\frac{1}{b^2} - sin^2.\ \theta\right)^{\frac{1}{2}}};\quad y - y' = 0$$

Soit $\varpi = 90°$, $cos.\ \varpi = 0$, $sin.\ \varpi = 1$,

$$x - x' = 0;\quad \frac{y - y'}{z - z'} = \frac{sin.\ \theta}{\left(\frac{1}{a^2} - sin^2.\ \theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ces équations font voir que si le rayon lumineux restant immobile, ou fait tourner le cristal sur sa base à chaque quart de révolution $\varpi = 0$, $\varpi = 90$, $\varpi = 180$, etc..... le rayon réfracté extraordinairement (A'), et le rayon réfracté ordinairement (A), se trouvent dans un même plan avec le rayon incident (a); en sorte que lorsque le cristal a fait une demi-révolution, le rayon réfracté extraordinairement a fait une révolution entière autour du rayon ordinaire. D'où on conclut que si le cristal fait une révolution entière, l'image extraordinaire fera deux révolutions autour de l'image ordinaire; ce qui est confirmé par l'expérience.

[30] Lorsqu'on aperçoit à travers le cristal quelque substance opaque située dans son intérieur ou sur sa seconde surface, la lumière rayonnante qui en émane est soumise à la surface d'émergence à la loi de réfraction que nous avons exposée; en sorte que, dans ce cas, pour calculer *à priori* les phénomènes, il faut considérer le point lumineux comme situé dans l'intérieur du cris-

tal. Soient donc XYZ les coordonnées du point rayonnant, $x'y'z'$ les coordonnées du point de la surface réfringente rencontré par un des rayons.

Les équations du rayon incident seront

$$\frac{x-x'}{z-z'}=\frac{X-x'}{Z-z'};\quad \frac{y-y'}{z-z'}=\frac{Y-y'}{Z-z'} \qquad (a)$$

et celles du rayon réfracté ordinaire

$$\frac{x-x'}{z-z'}=tang.\,\theta.\,cos.\,\varpi;\quad \frac{y-y'}{z-z'}=tang.\,\theta.\,sin.\,\varpi$$

Les angles θ et ϖ étant déterminés par les deux équations

$$\frac{X-x'}{Z-z'}=\frac{sin.\,\theta.\,cos.\,\varpi}{(cos^2.\,\theta+k^2)^{\frac{1}{2}}};\quad \frac{Y-y'}{Z-z'}=\frac{sin.\,\theta.\,sin.\,\varpi}{(cos^2.\,\theta+k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ce qui donne

$$sin.\,\varpi=\frac{Y-y'}{\sqrt{(X-x')^2+(Y-y')^2}}$$

$$cos.\,\varpi=\frac{X-x'}{\sqrt{(X-x')^2+(Y-y')^2}}$$

$$tang.\,\varpi=\frac{Y-y'}{X-x'}$$

$$sin.\,\theta=(1+k^2)^{\frac{1}{2}}.\left[\frac{(X-x')^2+(Y-y')^2}{(X-x')^2+(Y-y')+(Z-z')^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$cos.\,\theta=\left[\frac{(Z-z')^2-k^2.[(X-x')^2+(Y-y')^2]}{(X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$tang.\,\theta=\frac{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}.[(X-x')^2+(Y-y')^2]^{\frac{1}{2}}}{\{(Z-z')^2-k^2.[(X-x')^2+(Y-y')^2]\}^{\frac{1}{2}}}$$

en sorte que les équations du rayon réfracté ordinaire deviennent

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x'}{z-z'} &= \frac{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}.(X-x')}{\{(Z-z')^2-k^2.[(X-x)^2+(Y-y')^2]\}^{\frac{1}{2}}}\\ \frac{y-y'}{z-z'} &= \frac{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}.(Y-y')}{\{(Z-z')^2-k^2.[(X-x')^2+(Y-y')^2]\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

ce qui donne la position du rayon en fonction des coordonnées du point lumineux XYZ et de celle $x'y'z'$ du point d'émergence. En comparant ces équations à la suivante (voyez la première partie du *Traité d'optique* [1] [2] [3]),

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o}$$

on a

$$\begin{aligned}m &= (1+k^2)^{\frac{1}{2}}.(X-x')\\ n &= (1+k^2)^{\frac{1}{2}}.(Y-y')\\ o &= \{(Z-z')^2-k^2.[(X-x')+Y-y')^2]\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Les équations des courbes de réfraction sont $dz'=0$.

$$\left.\begin{aligned}&\left[o.\left(\frac{dn}{dx'}\right)-n.\left(\frac{do}{dx'}\right)\right]dx'^2\\ +&\left[o.\left(\frac{dn}{dy'}\right)-o.\left(\frac{dm}{dx'}\right)+m.\left(\frac{do}{dx'}\right)-n.\left(\frac{do}{dy'}\right)dx'\,dy'\right.\\ +&\left[m.\left(\frac{do}{dy'}\right)-o.\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right]dy'^2\end{aligned}\right\}=0$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&-(X-x').(Y-y')\,dx'^2\\ &+[(X-x')^2-(Y-y')^2]\,dx'\,dy'\\ &+(X-x').(Y-y')\,dy'^2\end{aligned}\right\}=0$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{M}{N} = -\frac{Y-y'}{X-x'}; \quad dz' = 0 \qquad (s)$$

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{M'}{N'} = \frac{(X-x')}{(Y-y')}; \quad dz' = 0 \qquad (s')$$

Ces équations appartiennent aux courbes par lesquelles passent les rayons réfractés consécutifs qui se rencontrent.

Le rayon réfracté qui répond au point $x'\,y'\,z'$ de la surface est rencontré en deux points par les rayons réfractés contigus, et les coordonnées de ces points sont déterminés par les équations.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o} \\ &= \frac{o\,M}{m.\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M + \left(\frac{do}{dy'}\right)N\right] - o\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N\right]} \\ &= \frac{1}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} (G)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{o} \\ &= \frac{o\,M'}{m.\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M' + \left(\frac{do}{dy'}\right)N'\right] - o\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M' + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N'\right]} \\ &= \frac{(Z-z')^2 - k^2.\,[(X-x')^2 + (Y-y')^2]}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}.\,(Z-z')^2} \end{aligned}\right\} (G')$$

et les distances de ces points de rencontre au point de réfractions sont

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= \frac{(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2}{1 + k^2}$$

$$R'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= [(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2]$$
$$\frac{\{(Z - z')^2 - k^2 . [(X - x')^2 + (Y - y')^2\}^2}{(1 + k^2) . (Z - z')^4}$$

Si on fait $x' = X$, $y' = Y$, alors

$$R = R' = \frac{(Z - z')}{(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}} = (Z - z') . \ 0{,}604487$$

[31] Considérons actuellement la lumière réfractée extraordinairement. Les équations du rayon incident seront, comme dans le cas précédent,

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{X - x'}{Z - z'} ; \quad \frac{y - y'}{z - z'} = \frac{Y - y'}{Z - z'} \qquad \text{(a)}$$

et les équations du rayon réfracté extraordinaire deviendront

$$\frac{x - x'}{z - z'} = tang. \ \theta . \ cos. \ \varpi$$
$$\frac{y - y'}{z - z'} = tang. \ \theta . \ sin. \ \varpi$$

les angles θ et ϖ étant déterminés par les deux équations

$$\frac{X - x'}{Z - z'} = \frac{a^2 b^2 . \ sin. \ \theta . \ cos. \ \varpi}{A . [A - a^2 . sin^2 . \theta . (b^2 . cos^2 . \varpi + A . sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{c}{A}$$
$$\frac{Y - y'}{Z - z'} = \frac{a^2 . \ sin. \ \theta . \ sin. \ \varpi}{[A . - a^2 . sin^2 . \theta . (b^2 . cos^2 . \varpi + A . sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

ce qui donne

$$\sin.\varpi = \frac{b^2.(Y-y')}{\{[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + b^4.(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos.\varpi = \frac{A.(X-x') - C.(Z-z')^2}{\{[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + b^4.(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin^2.\theta = \frac{A.\{[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + b^4.(Y-y')^2\}}{a^4b^4.(Z-z')^2 + a^2b^2.[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + a^2Ab^4(Y-y')^2}$$

$$tang.\theta = \frac{A^{\frac{1}{2}}.\{[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + b^4.(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}}{\{a^4b^4.(Z-z')^2 + (a^2b^2-A).[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + Ab^4.(a^2-1).(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

en sorte que les équations du rayon réfracté extraordinaire deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x'}{z-z'} &= \frac{A^{\frac{1}{2}}.[A.(X-x') - C.(Z-z')]}{\{a^4b^4.(Z-z')^2 + (a^2b^2-A).[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + Ab^4.(a^2-1).(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{y-y'}{z-z'} &= \frac{A^{\frac{1}{2}}b^2.(Y-y')}{\{a^4b^4.(Z-z')^2 + (a^2b^2-A).[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 + Ab^4.(a^2-1).(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} (A')$$

ce qui donne la position de ce rayon en fonction des coordonnées XYZ du point lumineux, et de celles $x'y'z'$ du point d'émergence.

En comparant cette équation à la suivante

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{d} = \frac{z-z'}{o}$$

on aura

$$m = A^{\frac{1}{2}}.[A.(X-x') - C.(Z-z')]$$

$$n = A^{\frac{1}{2}}b^2.(Y-y')$$

$$o = \left\{\begin{aligned} &\{a^4b^4.(Z-z')^2 + (a^2b^2-A).[A.(X-x') - C.(Z-z')]^2 \\ &+ Ab^4.(a^2-1).(Y-y')^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}$$

Les équations des courbes de réfraction sont $dz' = o$,

$$\left[o\left(\frac{dn}{dx'}\right) - n\left(\frac{do}{dx'}\right)\right] dx'^2$$
$$+ \left[o\left(\frac{dn}{dy'}\right) - o\left(\frac{dm}{dx'}\right) + m\left(\frac{do}{dx'}\right) - n\left(\frac{do}{dy'}\right)\right] dx'dy'$$
$$+ \left[m\left(\frac{do}{dx'}\right) - o\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right] dy'^2 = o$$

où

$$A.(Y - y').(a^2b^2 - A).[A.(X - x') - C.(Z - z')]\, dx'^2$$
$$+ \left\{\begin{array}{l} .(Z - z')^2 a^2 b^2.(A - b^2) \\ -[A.(X - x') - C.(Z - z')]^2.(a^2b^2 - A) \\ + A^2 b^2.(a^2 - 1).(Y - y') \end{array}\right\} dx'dy'$$
$$- A.(Y - y').b^2.(a^2 - 1).[A.(X - x') - C.(Z - z')]\, dy'^2 = o.$$

d'où on tire, en représentant cette équation par $\alpha dx'^2 + \delta dx'dy' - \beta dy^2 = o$,

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{M}{N} = -\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\alpha\beta}}{2\alpha}$$
$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{M'}{N'} = -\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + 4\alpha\beta}}{2\alpha}$$

En substituant ces valeurs de MN, $M'N'$ dans les expressions générales

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - x'}{m} = \dfrac{y - y'}{n} = \dfrac{z - z'}{o} \\ = \dfrac{oM}{m\left[\left(\dfrac{do}{dx'}\right)M + \left(\dfrac{do}{dy'}\right)N\right] - o\left[\left(\dfrac{dm}{dx'}\right)M + \left(\dfrac{dm}{dy'}\right)N\right]} \end{array}\right\} (G)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - x'}{m} = \dfrac{y - y'}{n} = \dfrac{z - z'}{o} \\ = \dfrac{oM'}{m\left[\left(\dfrac{do}{dx'}\right)M' + \left(\dfrac{do}{dy'}\right)N'\right] - o\left[\left(\dfrac{dm}{dx'}\right)M' + \left(\dfrac{dm}{dy'}\right)N'\right]} \end{array}\right\} (G')$$

elles donneront les valeurs des coordonnées des points de rencontre des rayons réfractés contigus à celui qui répond au point $x'y'z'$ de la surface réfringente.

Les distances de ces points de rencontre au point de réfraction seront

$$R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{o\,M}{m\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M + \left(\frac{do}{dy'}\right)N\right] - o\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N\right]}$$

$$R' = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{o\,M'}{m\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M' + \left(\frac{do}{dy'}\right)N'\right] - o\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M' + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N'\right]}$$

Si, entre les équations (G), on élimine x', y', on aura en xyz l'équation de la première surface caustique; et si on élimine les mêmes quantités entre les équations G', on obtiendra les équations de la seconde surface caustique. On voit que, dans ce cas-ci, ces deux surfaces sont bien distinctes, et l'une d'elles ne se réduit pas à une ligne droite, comme cela a lieu dans la réfraction ordinaire.

Pour avoir les valeurs de R et de R' lorsque le rayon émergent est perpendiculaire à la surface d'incidence, il faut faire

$$m = A^{\frac{1}{2}} \cdot [A \cdot (X-x') - C \cdot (Z-z') = 0$$
$$n = A^{\frac{1}{2}} b^2 \cdot (Y-y') = 0$$

et on a dans ce cas

$$M = 0; \quad N = 0$$
$$M' = -(Z-z')^2 a^4 b^2 \cdot (A-b^2; \quad N' = 0$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression précédente de R et R', donne

$$R = \frac{0}{0}; \quad R' = -\frac{a^2 b^2 . (Z - z')}{\left(\frac{dm}{dx'}\right)} = \frac{a^2 b^2 . (Z - z')}{A^{\frac{1}{2}}}$$

Pour déterminer la valeur de R, il faut observer qu'on a

$$\frac{o M}{m do - o dm} = \frac{o N}{n do - o dn}$$

et par conséquent

$$R = \frac{(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}} o N}{n\left[\left(\frac{do}{dx'}\right) M + \left(\frac{do}{dy'}\right) N\right] - o\left[\left(\frac{dn}{dy'}\right) M + \left(\frac{dn}{dy'}\right) N\right]}$$

Si actuellement on fait simplement $n = 0$, on aura, à cause de $\left(\frac{dn}{dx'}\right) = 0$,

$$R = \frac{(m^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{dn}{dy'}\right)}$$

et enfin, en faisant dans cette expression $m = 0$,

$$R = \frac{a^2 . (Z - z')}{A^{\frac{1}{2}}}; \quad R' = \frac{a^2 b^2 . (Z - z')}{A^{\frac{1}{2}}}$$

[32] Nous avons trouvé [30] que, dans le cas de la réfraction ordinaire lorsque le rayon émergent est normal à la surface, les deux valeurs de R et de R' sont égales entre elles; en sorte qu'il existe un foyer unique, ce qui détermine positivement le lieu de l'image. Dans le cas de la réfraction extraordinaire et dans les mêmes circonstances, les valeurs de R et de R' sont différentes;

ce qui indique qu'il n'existe pas de foyer unique, et explique pourquoi l'image extraordinaire paroît moins distincte que l'image ordinaire.

Supposons que le point lumineux XYZ soit sur la seconde face du cristal, en sorte que $z' - Z$ représente son épaisseur, et considérons les valeurs précédentes de R et R', lorsque la réfraction a lieu sur une face naturelle, on aura

$$R = (Z - z')\,\frac{a^2}{A^{\frac{1}{2}}} = (Z - z').\ 0.710386$$

$$R' = (Z - z')\,\frac{a^2 b^2}{A^{\frac{1}{2}}} = (Z - z').\ 0.634124$$

et enfin

$$\frac{R + R'}{2} = (Z - z').\ 0.672255$$

Ainsi la distance du point rayon à la surface étant $(Z - z')$, la distance de l'image produite par la réfraction ordinaire [30] sera $(Z - z')$ 0.604487, et celle de l'image produite par la réfraction extraordinaire $(Z - z')$ 0.672255. Ce qui explique pourquoi cette dernière image paroît toujours plus éloignée que la première. Nous ne considérons les images que pour le cas où le rayon visuel est perpendiculaire à la surface réfringente. Lorsque le rayon visuel est incliné à cette surface, on obtient les nombres analogues en faisant la substitution dans les expressions générales de R, R'.

Si, dans le cas de la réfraction extraordinaire, on fait $R = R'$, on en conclura $A = b^2$. Donc

$$t.\ \lambda = 0; \quad cos.\ \lambda = 1$$

en sorte que cette équation ne peut avoir lieu que lorsque la face d'incidence est perpendiculaire à l'axe. Dans ce cas les deux images du point rayonnant sont superposées l'une à l'autre, et sont situées sur le même rayon visuel lorsque ce dernier est perpendiculaire à la surface réfringente. On a alors

$$R = R' = (Z - z)' \frac{a^2}{b^2} = (Z - z'). \ 0.751890$$

Cette circonstance est la seule dans laquelle l'image extraordinaire est donnée par un foyer unique.

Si on fait *sin.* $\lambda = 1$, *cos.* $\lambda = 0$, la face d'incidence sera parallèle à l'axe du cristal. Alors on aura $A = a^2$,

$$R = a. \ (Z - z') = (Z - z'). \ 0.674171$$

$$R' = \frac{b^2}{a} = (Z' - z'). \ 0.542005$$

$$\frac{R + R'}{2} = (Z - z'). \ 0.608088$$

C'est dans ce cas que $R - R'$ est un *maximum*, et il est à remarquer que la distance moyenne $\frac{R+R'}{2}$ diffère peu de la distance $R = R' = 0.604487$ de la réfraction ordinaire. Ce qui est exactement conforme à l'observation; car si on incline un peu le rayon visuel pour séparer les deux images, on les juge à la même hauteur.

[33] Les expériences [11], [12] relatives aux rayons

produits par la réflexion partielle s'expliquent parfaitement par la théorie. En effet, soit

$$\cos^2.\theta + k^2 = \frac{1}{b^2} - \sin^2.\theta = \delta^2,$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x'}{z-z'} &= \text{tang.}\,\theta.\cos.\varpi\\ \frac{y-y'}{z-z'} &= \text{tang.}\,\theta.\sin.\varpi\end{aligned}\right\}$$ Équations du rayon incident.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x'}{z-z'} &= \frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta}\\ \frac{y-y'}{z-z'} &= \frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta}\end{aligned}\right\}$$ Équations du rayon réfracté ordinaire.

$$\left.\begin{aligned}X' &= x' - z'.\frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta}\\ Y' &= y' - z'.\frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta}\end{aligned}\right\}$$ Coordonnées du point de rencontre du rayon réfracté ordinaire avec la base $z = 0$ du rhomboïde.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-X'}{z} &= -\frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta}\\ \frac{y-Y'}{\delta} &= -\frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta}\end{aligned}\right\}$$ Équations du rayon réfracté ordinaire réfléchi ordinairement par la face inférieure du cristal.

$$\left.\begin{aligned}x &= x' - 2z'.\frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta}\\ y &= y' - 2z'.\frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta}\end{aligned}\right\}$$ Coordonnées du point d'émergence du rayon réfracté ordinaire réfléchi ordinairement.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-X'}{z} &= -\frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} + \frac{C}{A}\\ \frac{y-Y'}{\gamma} &= -\frac{a^2.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma}\end{aligned}\right\}$$ Rayon réfracté ordinaire réfléchi extraordinairement à la base $z = 0$ du rhomboïde.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - z'.\frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta} \\ &\quad - z'.\frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} \\ &\quad + \frac{z'C}{A} \\ {}''y &= y' - z'.\frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta} \\ &\quad - z'.\frac{a^2.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$ Coordonnées du point d'émergence du rayon réfracté ordinaire réfléchi extraordinairement.

En second lieu on a pour le rayon réfracté extraordinairement :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x'}{z - z'} &= \frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} + \frac{C}{A} \\ \frac{y - y'}{z - z'} &= \frac{a^2.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$ Équations du rayon réfracté extraordinaire.

$$\left.\begin{aligned} X'' &= x' - z'.\frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} \\ &\quad - z'.\frac{C}{A} \\ Y'' &= y' - z'.\frac{a^2.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$ Coordonnées du point de réflexion du rayon réfracté extraordinaire.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - X''}{z} &= -\frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} \\ &\quad + \frac{C}{A} \\ \frac{y - Y''}{z} &= -\frac{a^2.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$ Rayon réfracté extraordinaire réfléchi extraordinairement.

$$\left.\begin{aligned} {}''x &= x' - 2z'.\frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} \\ {}''y &= y' - 2z'.\frac{a^2.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$ Coordonnées du point d'émergence du rayon réfracté extraordinaire réfléchi extraordinairement.

$$\frac{x - X''}{z} = -\frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta}$$
$$\frac{y - Y''}{z} = -\frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta}$$

Rayon réfracté extraordinaire réfléchi ordinairement.

$$_{IV}x = x' - z'.\frac{a^2b^2.\sin.\theta.\cos.\varpi}{A\gamma} - z'.\frac{C}{A} - z'.\frac{\sin.\theta.\cos.\varpi}{\delta}$$
$$_{IV}y = y' - z'.\frac{a.\sin.\theta.\sin.\varpi}{\gamma} - z'.\frac{\sin.\theta.\sin.\varpi}{\delta}$$

Coordonnées du point d'émergence du rayon réfracté extraordinaire réfléchi ordinairement.

Enfin à chacun des points $_{I}x$, $_{I}y$, $_{II}x$, $_{II}y$, $_{III}x$, $_{III}y$, $_{IV}x$, $_{IV}y$, répond un rayon émergent dont l'équation est de la forme

$$\frac{x - {}_{\cdot}x}{z - z'} = -\tang.\theta.\cos.\alpha$$
$$\frac{y - {}_{\cdot}y}{z - z'} = -\tang.\theta.\sin.\alpha$$

En substituant à $_{\cdot}x$, $_{\cdot}y$, z, les coordonnées $_{II}x$, $_{II}y$, etc. on a les quatre rayons émergens parallèles.

Dans le cas où le rayon incident est parallèle à la section principale du cristal, les deux rayons correspondans aux points $_{II}x$, $_{II}y$, $_{IV}x$, $_{IV}y$ s'éteignent totalement. On a dans ce cas $\cos.\varpi = 1$, $\sin.\varpi = 0$; ce qui donne pour les deux rayons restans

$$_{I}x = x' - 2z'.\frac{\sin.\theta}{\delta}\,;\quad {}_{I}y = y'$$
$$_{II}x = x' - 2z'.\frac{a^2b^2.\sin.\theta}{A\gamma}\,;\quad {}_{II}y = y'$$

et enfin la distance $'x - ''x$ observée dans les expériences [12] a pour expression

$$'x - ''x = 2\,z'.\left(\frac{a^2b^2.\ sin.\ \theta}{A\gamma} - \frac{sin.\ \theta}{\delta}\right)$$

Cette distance a été observée sur un cristal dont l'épaisseur $z' = 0^m0338907\frac{4}{}$. En la calculant d'après les valeurs $a = 0.67334338$, $b = 0.60374442$, on obtient les résultats suivans :

θ.	$'x - ''x$		Différences.
	Observé.	Calculé.	
10°	0^m00035	$0^m0003548$	— 0.0000048
20	0.00075	0.0007384	+ 0.0000116
30	0.00115	0.0011778	— 0.0000278
45	0.00200	0.0019894	+ 0.0000106
60	0.00300	0.0029729	+ 0.0000271

Lorsque le rayon incident est dans un plan perpendiculaire à la face d'incidence et à la section principale, on a, d'après les expériences [13], quatre rayons émergens disposés symétriquement par rapport au plan d'incidence. Pour remplir cette condition, il faut faire dans les équations précédentes $sin.\ \varpi = 1$, $cos.\ \varpi = 0$, alors les coordonnées des quatre points d'émergence deviennent

$$_{I}x = x' ; \qquad _{I}y = y' - 2z' . \frac{\sin.\theta}{\delta}$$

$$_{II}x = x' + z' . \frac{C}{A} ; \qquad _{II}y = y' - z' . \frac{\sin.\theta}{\delta} - z' . \frac{a^2 . \sin.\theta}{\delta}$$

$$_{III}x = x' ; \qquad _{III}y = y' - 2z' . \frac{a^2 . \sin.\theta}{\gamma}$$

$$_{IV}x = x' - z' . \frac{C}{A} ; \qquad _{IV}y = y' - z' . \frac{\sin.\theta}{\delta} - z' . \frac{a^2 . \sin.\theta}{\gamma}$$

expressions qui sont conformes aux résultats des observations. En effet, d'après les expériences [13], on a

$$_{I}x = _{II}x ; \quad _{II}y = _{IV}y ; \quad _{I}y - _{III}y = 2z' . \left(\frac{a^2 . \sin.\theta}{\gamma} - \frac{\sin.\theta}{\delta} \right)$$

Cette distance a été observée sur un cristal dont l'épaisseur $z' = 0^m0338907\frac{4}{}$. En la calculant d'après les valeurs précédentes de a et de b, on a

θ	$_{I}y - _{II}y$		Différences.
	Observé.	Calculé.	
10	0^m0013	0.0012632	+ 0.0000368
20	0.0026	0.0025980	+ 0.0000020
30	0.0041	0.0040740	+ 0.0000260
40	0.0057	0.0057496	— 0.0000496
50	0.0076	0.0076452	— 0.0000452

[34] Lorsqu'on considère la marche d'un rayon ordinaire dans un prisme de spath d'Islande, la seule donnée du problème est l'angle compris entre les faces;

mais si l'on veut déterminer la marche d'un rayon extraordinaire, il faut encore avoir égard à l'angle que chacune des faces forme avec l'axe de la molécule intégrante du cristal.

Pour simplifier le problème, supposons d'abord le cas où le prisme est composé de deux faces dont la ligne d'intersection est perpendiculaire à l'axe, et supposons le plan d'incidence perpendiculaire à l'arête du prisme. Dans cette hypothèse ce plan passe par l'axe, et les angles ϖ et ϖ' sont nuls.

Soient θ l'angle d'incidence;

θ' l'angle de réfraction extraordinaire;

τ l'angle d'émergence;

τ' l'angle de réfraction extraordinaire correspondant à l'incidence τ;

λ l'angle que l'axe du cristal fait avec la normale à la face d'incidence;

λ' l'angle qu'il fait avec la normale à la face d'émergence;

ζ l'angle compris entre les deux faces.

Soit de plus, comme précédemment,

$$A = a^2.\ sin^2.\ \lambda + b^2.\ cos^2.\ \lambda; \quad C = sin.\ \lambda.\ cos.\ \lambda.\ (a^2 - b^2)$$
$$A' = a^2.\ sin^2.\ \lambda' + b^2.\ cos^2.\ \lambda'; \quad C' = sin.\ \lambda'.\ cos.\ \lambda'.\ (a^2 - b^2)$$

on aura d'abord, d'après les conditions du problème, $\lambda' - \lambda = \zeta$; en sorte qu'on pourra toujours exprimer un des angles λ ou λ' en fonction de l'autre.

On a en second lieu, entre les angles θ, θ'; τ, τ', les deux équations

$$tang.\ \theta' = \frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta}{A.\ (A - a^2 b^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$tang.\ \tau' = \frac{a^2 b^2.\ sin.\ \tau}{A'.\ (A' - a^2 b^2.\ sin^2.\ \tau)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'}{A'}$$

et enfin

$$\tau' \pm \theta' = \pm \zeta$$

Si entre ces équations on élimine θ', τ', on a une relation entre l'angle d'incidence θ et l'angle d'émergence τ; d'où on tire

$$sin^2.\ \tau = \frac{A'.\left\{\left(\frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta}{A.\ (A - a^2 b^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}\right).\ (A' + C'.\ tang.\ \zeta) + A'.\ tang.\ \zeta - C\right\}^2}{a^4 b^4.\left[1 - \left(\frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta}{A.\ (A - a^2 b^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}\right).\ tang.\ \zeta\right]^2 + a^2 b^2.\left[\left(\frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta}{A.\ (A - a^2 b^2.\ sin^2.\ \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}\right).\ (A' + C'.\ tang.\ \zeta) + A'.\ tang.\ \zeta\right]^2}$$

Enfin, en nommant υ l'angle compris entre le rayon incident et le rayon émergent, on aura cet angle par l'équation $\upsilon \pm \zeta = \tau + \theta$; ainsi on pourra l'obtenir en fonction de θ ou de τ seulement, comme cela s'opère dans la réfraction ordinaire.

Si la première face du cristal est perpendiculaire à l'axe, on a

$$\lambda = 0;\quad \lambda' = \zeta;\quad A = b^2;\quad C = 0$$

$$A' = a^2.\ sin^2.\ \zeta + b^2.\ cos^2.\ \zeta$$

$$C' = sin.\ \zeta.\ cos.\ \zeta.\ (a^2 - b^2)$$

Enfin si un rayon de lumière tombe perpendiculairement sur cette face, on a

$$sin.\ \theta = 0;\quad \theta' = 0;\quad \tau' = -\zeta$$

$$sin^2.\ \tau = \frac{A'.\ (A'.\ tang.\ \zeta + C')^2}{a^4 b^4 + a^2 b^2.\ (A'.\ tang.\ \zeta + C')^2}$$

et, si on met pour $A'C'$ leurs valeurs,

$$sin.\ r = \frac{sin.\ \zeta}{b}$$

Or cette valeur de sinus r est celle qu'on obtiendroit en considérant la marche d'un rayon ordinaire à travers le prisme; d'où on conclue que le rayon émergent ordinaire et l'extraordinaire ont une même direction lorsque le rayon incident tombe sur une face perpendiculaire à l'axe du cristal. Ce résultat est indépendant de l'angle compris entre les faces du prisme. Ainsi lorsqu'on regarde quelque objet à travers un prisme de cette espèce, son image n'est pas doublée, pourvu que la face tournée vers l'œil soit celle qui est perpendiculaire à l'axe, et qu'elle soit maintenue perpendiculairement au rayon visuel. Cette circonstance donne un moyen direct de déterminer l'axe de réfraction des diverses substances cristallisées; car lorsque l'image vue à travers deux faces parallèles, n'est pas doublée, on peut en conclure que ces faces sont parallèles ou perpendiculaires à l'axe du cristal : mais si, en taillant une des faces de manière à former un prisme, l'image reste simple, on est assuré que la première face est perpendiculaire à l'axe de réfraction. Dans le rhomboïde, l'axe de réfraction se confond avec l'axe du cristal; mais dans les autres formes on n'a pas de données suffisantes pour le déterminer *à priori*. Cependant le nombre des directions entre lesquelles on peut balancer est toujours très-borné. Dans l'octaèdre à triangle scalène, par exemple, on est assuré d'avance

que l'axe de réfraction est un des trois axes rectangulaires de la forme primitive. Il ne reste plus qu'à déterminer celui qui satisfait à la condition que nous venons d'énoncer.

Si la première face du cristal est parallèle à l'axe, on a

$$\lambda = 90^\circ; \quad \lambda' = 90^\circ - \zeta; \quad A = a^2; \quad C = 0$$

$$A' = a^2 . \cos^2 . \zeta + b^2 . \sin^2 . \zeta$$

$$C' = \sin . \zeta . \cos . \zeta . (a^2 - b^2)$$

Enfin, si un rayon de lumière tombe perpendiculairement sur sur cette face,

$$\sin . \theta = 0; \quad \theta' = 0; \quad \tau' = \zeta$$

$$\sin^2 . \tau = \frac{A' . (A' . \tan g . \zeta - C')^2}{a^4 b^4 + a^2 b^2 . (A' . \tan g . \zeta - C')^2}$$

et, si on met pour $A' C'$ leurs valeurs,

$$\sin . \tau = \frac{\sin . \zeta}{a}$$

En considérant la marche du rayon ordinaire on auroit eu

$$\sin . \tau = \frac{\sin . \zeta}{b}$$

Ainsi l'angle c compris entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire, à leur sortie du cristal, aura pour expression

$$\sin . c = \frac{\sin . \zeta}{ab} . [(a^2 - \sin^2 . \zeta)^{\frac{1}{2}} - (b^2 - \sin^2 . \zeta)^{\frac{1}{2}}]$$

Dans le cas que nous avons considéré précédemment,

les deux rayons ordinaire et extraordinaire se confondent, tant dans l'intérieur du cristal qu'après leur sortie. Dans ce dernier cas les deux rayons se confondent dans l'intérieur du cristal; ils suivent la même direction, quoi qu'ils aient des vitesses différentes; mais ils se séparent en sortant du cristal. Pour avoir le plus grand angle qu'ils puissent comprendre au point d'émergence où ils se séparent, il faut supposer $sin.\ \zeta = b$; car au-delà de cette limite le rayon ordinaire est réfléchi par la seconde face du cristal. La plus grande valeur de l'angle c est donc donnée par l'équation $cos.\ c = \frac{b}{a}$, et, comme on a dans le spath d'Islande,

$$a = 0.6741717;\ b = 0.6044871;\ c = 26^{\circ}\,16'\,50''$$

[35] Supposons actuellement que les deux faces du prisme se coupent suivant une ligne qui fasse un angle quelconque avec l'axe du cristal; il n'existera plus de relations entre les deux angles λ, λ', et ils devront être considérés comme deux constantes indépendantes. De plus, les sections principales des deux faces ne seront plus parallèles, comme dans le cas précédent.

Nommons donc ϖ l'angle que le plan d'incidence fait avec la section principale de la première face, et φ l'angle que le plan d'émergence fait avec la section principale de la seconde face; ϖ' sera l'angle que la projection du rayon réfracté sur la première face fait avec sa section principale, et φ' l'angle que le même rayon projeté sur la seconde face fait avec sa section principale.

Le problème se réduit à déterminer les angles τ et φ en fonction de $\theta\varpi$, et réciproquement. Or

$$tang.\theta'.cos.\varpi' = \frac{a^2b^2.sin.\theta.cos.\varpi}{A.[A-a^2.sin^2.\theta.(b^2.cos^2.\varpi+A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{A} \quad (1)$$

$$tang.\theta'.sin.\varpi' = \frac{a^2.sin.\theta.sin.\varpi}{[A-a^2.sin^2.\theta.(b^2.cos^2.\varpi+A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

$$tang.\tau'.cos.\varphi' = \frac{a^2b^2.sin.\tau.cos.\varphi}{A'[A'-a^2.sin^2.\tau.(b^2.cos^2.\varphi+A'.sin^2.\varphi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'}{A} \quad (3)$$

$$tang.\tau'.cos.\varphi' = \frac{a^2.sin.\tau.sin.\varphi}{[A'-a^2.sin^2.\tau.(b^2.cos^2.\varphi+A'.sin^2.\varphi)]^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

en second lieu on a

$$cos.\lambda.cos.\theta'+sin.\lambda.sin.\theta'.cos.\varpi' = cos.\lambda'.cos.\tau'+sin.\lambda'.sin.\tau'.cos.\varphi' \quad (5)$$

puisque chacun des membres de cette équation exprime le cosinus de l'angle compris entre le rayon réfracté et l'axe du cristal, lorsque λ et λ' sont positifs.

Enfin on déterminera τ' par l'équation suivante:

$$\left.\begin{aligned} sin.\lambda.cos.\tau' = {} & sin.\theta'.cos.\varpi'.cos.\lambda' - sin.\theta'.cos.\varpi'.cos.\lambda.cos.\zeta \\ & + cos.\theta'.cos.\zeta.sin.\lambda \\ & - sin.\theta'.sin.\varpi'.\left\{1 - cos^2.\lambda - cos^2.\lambda' - cos^2.\zeta + 2\,cos.\lambda.cos.\lambda'.cos.\zeta\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

On pourroit remplacer cette équation par la suivante qui est plus symétrique :

$$\frac{sin.\theta'.sin.\varpi'}{sin.\tau'.sin.\varphi'} = \frac{sin.\theta'.cos.\varpi'.(cos.\lambda'-cos.\lambda.cos.\zeta)+sin.\lambda.(cos.\theta'.cos.\zeta-cos.\tau')}{sin.\tau'.cos.\varphi'.(cos.\lambda-cos.\lambda'.cos.\zeta)+sin.\lambda'.(cos.\tau'.cos.\zeta-cos.\theta')}$$

mais cette dernière n'est pas aussi bien disposée pour les besoins du calcul.

Entre les six équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) on peut

éliminer $\theta'\varpi'$, $\tau'\varphi'$, et on obtient deux relations entre les angles $\theta\varpi$, $\tau\varphi$, qui expriment les positions respectives du rayon incident et du rayon émergent.

Pour déterminer l'angle υ compris entre le rayon incident et le rayon émergent, nommons θ'' l'angle compris entre le rayon émergent et la normale à la face d'incidence, ϖ'' l'angle que la projection de ce rayon sur la face d'incidence fait avec sa section principale, on aura

$$\cos.\upsilon = \sin.\theta.\sin.\theta''(\cos.\varpi.\cos.\varpi'' + \sin.\varpi.\sin.\varpi'') + \cos.\theta.\cos.\theta'' \quad (7)$$

Faisons actuellement, pour abréger,

$$\frac{\cos.\lambda.\cos.\zeta - \cos.\lambda'}{\cos.\zeta.\sin.\lambda} = \omega$$

$$\frac{(1 - \cos^2.\lambda - \cos^2.\lambda' - \cos^2.\zeta + 2\cos.\lambda.\cos.\lambda'.\cos.\zeta)^{\frac{1}{2}}}{\cos.\zeta.\sin.\lambda} = \downarrow$$

on aura

$$1 + \omega^2 + \downarrow^2 = \frac{1}{\cos^2.\zeta}$$

et

$$\cos.\tau = (\cos.\theta'' - \omega\sin.\theta''.\cos.\varpi'' - \downarrow.\sin.\theta''.\sin.\varpi'').\cos.\zeta \quad (8)$$

$$\tan.\varphi = \frac{\downarrow.(\downarrow.\cos.\theta'' + \sin.\theta''.\sin.\varpi'') + (\omega.\cos.\theta'' + \sin.\theta''.\cos.\varpi'').(\omega + \tan.\lambda) + \downarrow.\tan.\lambda.(\downarrow.\sin.\theta''.\cos.\varpi'' - \omega.\sin.\theta''.\sin.\varpi'')}{\downarrow.\sin.\theta''.\cos.\varpi'' - \omega.\sin.\theta''.\sin.\varpi'')^2 + (\downarrow.\cos.\theta'' + \sin.\theta''.\sin.\varpi'')^2 + (\omega.\cos.\theta'' + \sin.\theta''.\cos.\varpi'')^2]^{\frac{1}{2}}[\downarrow^2.\tan.^2.\lambda + \downarrow^2 + (\omega$$

Si on tire des équations (8) (9) les valeurs de θ'' et ϖ'', et si on les substitue dans l'équation (7), on aura l'angle υ en fonction $\theta\varpi$, $\tau\varphi$; et en déterminant, comme nous l'avons indiqué plus haut τ et φ en fonction de θ et ϖ, on aura enfin la valeur de υ en fonction des élémens du rayon incident θ, ϖ et des constantes $\zeta\lambda\lambda'$.

Si les deux faces du prisme sont parallèles à l'axe du

cristal, on aura $\lambda = 90°$; $\lambda' = 90°$, $A = A' = a^2$, $C = C' = 0$. Supposons de plus que l'on considère la réfraction dans un plan perpendiculaire à l'arête du prisme, on aura

$$\varpi = \varpi' = \varphi = \varphi' = 90°.$$

Les équations (1) (3) (5) deviendront identiques, et les équations (2) (4) (6) se réduiront à

$$\sin. \theta' = a. \sin. \theta \qquad (2)$$
$$\sin. \tau' = a. \sin. \tau \qquad (4)$$
$$\tau' = \theta' + \zeta \qquad (6)$$

d'où, en éliminant $\theta' \tau'$,

$$\sin. \tau = \sin. \theta. \cos. \zeta + \sin. \zeta. \left(\frac{1}{a^2} - \sin^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

Ce résultat donne un moyen de déterminer le coefficient a de la réfraction extraordinaire avec autant de facilité et de précision que le coefficient b de la réfraction ordinaire. En effet, si on observe le plus grand angle v compris entre un objet et son image vue à travers le prisme, on aura

$$\theta = \tau = \frac{v + \zeta}{2}; \quad \theta' = \tau' = \frac{\zeta}{2}$$

et par conséquent

$$a = \frac{\sin. \theta'}{\sin. \theta} = \frac{\sin. \frac{\zeta}{2}}{\sin. \frac{v + \zeta}{2}}$$

[36] Dans le paragraphe [33] j'ai déterminé la di-

rection des rayons dus à la réflexion partielle, en supposant que la face d'incidence et celle d'émergence ou de réflexion sont parallèles entre elles. Dans cette hypothèse le plus grand angle de réfraction extraordinaire correspondant à $sin.\ \theta = i$ est égal au plus grand angle de réflexion extraordinaire; mais lorsqu'on considère, comme dans le paragraphe précédent, des faces inclinées l'une à l'autre, les rayons réfractés par une face peuvent être réfléchis en entier par la seconde face; dans le premier cas on obtient toujours deux rayons émergens à la seconde face; dans le second cas, et suivant les inclinaisons du rayon incident, ces deux rayons se réduisent à un seul ou disparoissent l'un et l'autre, parce qu'ils sont totalement réfléchis. Je vais indiquer comment on peut déduire des formules précédentes la loi de ces divers phénomènes et la marche des rayons dans les différens cas.

Considérons d'abord les limites des réfractions sur la face d'incidence.

Les équations du rayon réfracté ordinaire sont, en supposant le point d'incidence à l'origine des coordonnées,

$$\frac{x}{z} = \frac{sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}\ ;\quad \frac{y}{z} = \frac{sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En faisant $\theta = 90°$, $sin.\ \theta = 1$, $cos.\ \theta = 0$, on aura les équations des rayons correspondans aux plus grands angles de réfraction

$$\frac{x}{z} = \frac{cos.\ \varpi}{k}\ ;\quad \frac{y}{z} = \frac{sin.\ \varpi}{k}$$

et en éliminant l'angle ϖ, le lieu de tous ces rayons sera

$$k^2 . (x^2 + y^2) = z^2 \qquad (1)$$

équation d'un cône droit à base circulaire qui renferme tous les rayons réfractés ordinaires correspondans à toutes les valeurs possibles de θ et ϖ. Ainsi, en nommant $_{,}\theta$ l'angle de réfraction ordinaire, la plus grande valeur de *sin.* $_{,}\theta$ sera

$$\frac{1}{(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.6044871$$

et la plus grande valeur de $_{,}\theta$,

$$_{,}\theta = 37^\circ\ 11'\ 31''$$

Réciproquement tout rayon incident $n\,b$ (*fig.* 13) sur la face intérieure du cristal, et tel que $_{,}\theta$ sera compris entre o et 37° 11′ 31″, se réfractera suivant une direction $b\,a$, comprise entre o et 90°; mais si les deux faces du cristal ne sont pas parallèles (*fig.* 14), on peut concevoir un rayon $n'\,b'$ tel que $_{,}\theta$ soit plus grand que 37° 11′ 31″; alors ce rayon n'est plus réfracté, mais il est réfléchi intérieurement suivant $b'\,n''$, en formant avec la normale un angle égal à $_{,}\theta$. En effet, dans ce second cas, la vitesse de la lumière comptée perpendiculairement à la face, est détruite par la force attractive avant que le rayon ait atteint la limite de la sphère d'activité de cette force; cette vitesse commence ensuite à augmenter en sens contraire, et reçoit exactement la même intensité qu'elle avoit perdue, en sorte que le rayon est réfléchi suivant la loi ordinaire.

Il se passe des phénomènes analogues dans la réfraction extraordinaire; mais comme nous n'avons donné la direction des rayons extraordinaires qu'en fonction de celle du rayon incident, on n'en peut déduire que la direction des rayons réfléchis extraordinairement, dus à la réflexion partielle, et correspondans aux rayons réfléchis ordinaires compris entre $,\theta = 0$, $,\theta = 37^\circ\ 11'\ 31''$; il faut, pour comprendre dans les mêmes formules tous les cas de réfraction et de réflexion, substituer dans les formules de réfraction que nous avons donnée, à $sin.\ \theta$ sa valeur $\frac{sin.\ ,\theta}{b}$: on aura alors les angles de réfraction extraordinaire et de réflexion partielle correspondans aux angles d'incidence compris entre $\theta = 0$, $\theta = 90^\circ$, $,\theta = 0$, $,\theta = 37^\circ\ 11'$, $31''$, et les angles de réflexion totale extraordinaire correspondans aux rayons réfléchis ordinaires compris entre $,\theta = 37^\circ\ 11'\ 31''$ et $,\theta = 90^\circ$.

Nous allons éclaircir cette matière par des exemples.

[37] Les équations du rayon réfracté extraordinaire sont, en prenant l'origine des coordonnées au point d'incidence,

$$\frac{x}{z} = \frac{a^2.b^2.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{A.\ [A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{a^2.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{[A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

En faisant

$$\theta = 90^\circ;\quad sin.\ \theta = 1;\quad cos.\ \theta = 0$$

on aura les équations des rayons extraordinaires correspondans aux plus grands angles de réfraction :

$$\frac{x}{z} = \frac{a^2 b^2 . \cos . \varpi}{A . [A - a^2 . (b^2 . \cos^2 . \varpi + A . \sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{a^2 . \sin . \varpi}{[A - a^2 . (b^2 \cos^2 . \varpi + A . \sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

En éliminant l'angle ϖ entre ces deux équations, le lieu de tous ces rayons sera

$$a^4 b^4 z^2 = (Ax - Cz)^2 . (A - a^2 b^2) + A b^4 y^2 . (1 - a^2) \quad (2)$$

équation d'une surface conique du second degré, qui renferme tous les rayons réfractés extraordinairement correspondans à toutes les valeurs possibles de θ et ϖ. De même tous les rayons réfractés ordinaires correspondans à toutes les valeurs possibles de θ et ϖ étant renfermés dans la surface conique

$$k^2 . (x^2 + y^2) = z^2 \quad (1)$$

l'espace compris entre ces deux surfaces coniques jouira de cette propriété remarquable, qu'il ne contiendra que des rayons ordinaires ou des rayons extraordinaires. Par conséquent si, au lieu de considérer un rayon passant de l'air dans le cristal, on considère un rayon passant du cristal dans l'air, et si on suppose de plus que son inclinaison soit telle qu'il soit compris entre les deux surfaces coniques proposées, il sera réfracté ou réfléchi suivant qu'il sera ordinaire ou extraordinaire. Ces deux surfaces coniques étant concentriques, se coupent géné-

ralement suivant deux droites qui séparent l'espace qui convient à la réflexion du rayon ordinaire de l'espace qui convient à celle du rayon extraordinaire.

Considérons, par exemple, les limites des réfractions ordinaires et extraordinaires dans la section principale dont l'équation est $y = 0$. Nommant θ l'angle de réfraction ordinaire, θ' celui de réfraction extraordinaire, on aura, en faisant $y = 0$ dans les équations (1) (2),

$$\frac{x}{z} = \textit{tang.}\ \theta = \pm\frac{1}{k} = \pm 0.758819$$

$$\theta = \pm 37^\circ\ 11'\ 31''$$

$$\frac{x}{z} = \textit{tang.}\ \theta' = \frac{C}{A} \pm \frac{a^2b^2}{A.(A - a^2b^2)}$$

ou

$$\textit{tang.}\ \theta' = 0.931403;\quad \theta' = 42^\circ\ 57'\ 57''$$

$$\textit{tang.}\ \theta' = -0.713753;\quad \theta' = -35^\circ\ 31'\ 2''$$

Ainsi tout rayon ordinaire qui tombera sur la surface du cristal, en faisant avec la normale un angle $> 37^\circ\ 11'\ 31''$ et $< 42^\circ\ 57'\ 57''$, sera nécessairement réfléchi, tandis qu'un rayon extraordinaire compris dans les mêmes limites sera réfracté et sortira du cristal. Réciproquement tout rayon extraordinaire compris entre les angles $-37^\circ\ 11'\ 31''$ et $-35^\circ\ 31'\ 2''$, sera réfléchi, tandis qu'un rayon ordinaire compris dans les mêmes limites sera réfracté et sortira du cristal. Les arêtes bm, bm' (*fig.* 15) appartiennent à la surface conique (1), et celles bn, bn', à la surface conique (2).

Si, dans les équations du rayon extraordinaire,

$$\frac{x}{z} = \frac{a^2 b^2 . \sin . \theta . \cos . \varpi}{A . [A - a^2 . \sin^2 . \theta . (b^2 . \cos^2 . \varpi + A . \sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{a^2 . \sin . \theta . \sin . \varpi}{[A - a^2 . \sin^2 . \theta . (b^2 . \cos^2 . \varpi + A . \sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

on fait

$$\varpi = 90 ; \quad \sin . \varpi = 1 ; \quad \cos . \varpi = 0$$
$$\theta = 90 ; \quad \sin . \theta = 1 ; \quad \cos . \theta = 0$$

on aura la lime des réfractions lorsque le rayon incident est compris dans un plan perpendiculaire à la section principale,

$$\frac{x}{z} = tang . \theta' . \cos . \varpi' = \pm \frac{C}{A} = \pm 0.108824.5$$

$$\frac{y}{z} = tang . \theta' . \sin . \varpi' = \pm \frac{a^2}{A^{\frac{1}{2}} . (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.961833$$

$$angle . (tang . = 0.108824.5) = 6^\circ \ 12' \ 38''$$
$$angle . (tang . = 0.961833) = 43^\circ \ 53' \ 7''$$

[38] Déterminons actuellement les circonstances de la réflexion intérieure, lorsque les angles d'incidence sont plus grands que les limites comprises dans les deux surfaces coniques (1) et (2). Les relations entre l'angle d'incidence et celui de réfraction extraordinaire sont, d'après ce que nous avons vu,

$$tang . \theta' . \cos . \varpi' = \frac{a^2 b^2 . \sin . \theta . \cos . \varpi}{A . [A - a^2 . \sin^2 . \theta . (b^2 . \cos^2 . \varpi + A . \sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$tang . \theta' . \sin . \varpi' = \frac{a^2 . \sin . \theta . \sin . \varpi}{[A - a^2 . \sin^2 . \theta . (b^2 . \cos^2 . \varpi + A . \sin^2 . \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

Mais comme on a $b.\ sin.\ \theta = sin.\ {}_{,}\theta$, les relations entre le rayon réfracté ordinaire et le rayon réfracté extraordinaire seront

$$tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = \frac{a^2 b^2.\ sin.\ {}_{,}\theta.\ cos.\ \varpi}{A.[Ab^2 - a^2.sin^2.\ {}_{,}\theta.(b^2.cos^2.\varpi + A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = \frac{a^2.\ sin.\ {}_{,}\theta.\ sin.\ \varpi}{[Ab^2 - a^2.sin^2.\ {}_{,}\theta.(b^2.cos^2.\varpi + A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

et ces relations auront lieu depuis $sin.\ {}_{,}\theta = 0$ jusqu'à la valeur de ${}_{,}\theta$ qui rend $tang.\ \theta' = \infty$, tandis que les premières relations ne donnent θ' que depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 90°$, c'est-à-dire depuis ${}_{,}\theta = 0$ jusqu'à $sin.\ {}_{,}\theta = b$. Les nouvelles valeurs de θ' comprises dans les dernières formules sont relatives à la réflexion totale, c'est-à-dire à celle qu'on nomme généralement en optique réflexion par réfraction ; et nous allons voir en effet que, dans cette circonstance, à chaque rayon ordinaire correspond un rayon extraordinaire.

Si, dans les expressions précédentes, on fait $tang.\ \theta' = \infty$, on a

$$Ab^2 - a^2.\ sin^2.\ {}_{,}\theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi) = 0$$

D'un autre côté les équations du rayon ordinaire sont

$$x = z.\ tang.\ {}_{,}\theta.\ cos.\ \varpi$$
$$y = z.\ tang.\ {}_{,}\theta.\ sin.\ \varpi$$

Si entre ces trois équations on élimine ${}_{,}\theta$ et ϖ, on obtient pour résultat

$$a^2.\ (b^2 x^2 + A y^2) = Ab^2.\ (x^2 + y^2 + z^2) \qquad (3)$$

équation d'une surface conique qui renferme tous les rayons ordinaires qui, par des réflexions partielles ou totales, peuvent produire des rayons extraordinaires. Tous les rayons parallèles aux arêtes de cette surface conique, en se réfléchissant extraordinairement, sont parallèles à la surface.

Ainsi tous les rayons ordinaires compris dans la surface conique (1) seront contenus dans la surface conique (1), en se réfléchissant ordinairement, et dans la surface conique (2), en se réfléchissant extraordinairement. Les réflexions produites entre ces premières limites sont des réflexions partielles. Tous les rayons ordinaires compris entre la surface conique (1) et la surface conique (3), seront compris dans les mêmes limites, en se réfléchissant ordinairement; mais en se réfléchissant extraordinairement, ils seront compris entre la surface conique (2) et la face du cristal. Enfin, tous les rayons ordinaires compris entre la surface conique (3) et la face du cristal, seront compris dans les mêmes limites, en se réfléchissant ordinairement, et ils ne pourront dans aucun cas produire de rayons réfléchis extraordinairement; en sorte que, dans cette dernière limite seulement, le cristal se comportera comme un simple corps diaphane. Ce résultat de l'analyse est vérifié par l'expérience. J'indiquerai plus bas la cause physique de ce phénomène particulier.

Quant aux rayons extraordinaires, ceux qui sont compris dans la surface conique (2) seront compris dans la même limite en se réfléchissant extraordinairement, et

dans la surface conique (1) en se réfléchissant ordinairement. Enfin, ceux qui sont compris entre la surface conique (2) et la face du cristal, seront compris dans les mêmes limites en se réfléchissant extraordinairement, et seront compris entre les surfaces (1) (3) en se réfléchissant ordinairement.

Il est facile d'établir la relation qui existe entre la direction du rayon extraordinaire incident et celle du rayon extraordinaire réfléchi. En effet, en nommant dans ce dernier $\theta''\varpi''$ les angles analogues à ceux que nous avons désignés par $\theta'\varpi'$ dans le premier, on a évidemment

$$\begin{aligned} tang.\,\theta'.\,cos.\,\varpi' - \frac{C}{A} &= -\,tang.\,\theta''.\,cos.\,\varpi'' + \frac{C}{A} \\ tang.\,\theta'.\,sin.\,\varpi' &= -\,tang.\,\theta''.\,sin.\,\varpi'' \end{aligned}$$

d'où on tire

$$tang.\,\theta'' = -\left[\left(tang.\,\theta'.\,cos.\,\varpi' - \frac{2C}{A}\right)^2 + tang^2.\,\theta'.\,sin^2.\,\varpi'\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$tang.\,\varpi'' = \frac{tang.\,\theta'.\,sin.\,\varpi'}{tang.\,\theta'.\,cos.\,\varpi' - \frac{2C}{A}}$$

On voit par ce résultat que $\theta' = 90°$ donne toujours $\theta'' = 90°$, quelle que soit la face naturelle ou artificielle sur laquelle s'opère la réflexion. De même, en faisant $\theta' = 90°$ on a $\varpi'' = \varpi'$.

Lorsque $C = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on a $sin.\,\lambda = 0$ ou $cos.\,\lambda = 0$, alors on a toujours $\theta'' = -\theta'$, $\varpi'' = \varpi'$; d'où on conclue que sur une face du cristal perpendiculaire à l'axe, et sur toutes celles qui lui sont paral-

lèles, la réflexion extraordinaire s'opère comme la réflexion ordinaire, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

[39] Si on considère la réflexion sur une face perpendiculaire à l'axe $\lambda = 0$, $sin.\ \lambda = 0$, $cos.\ \lambda = 1$, $A = b^2$, $C = 0$, les équations des trois surfaces coniques deviennent

$$(1 - b^2).(x^2 + y^2) = b^2 z^2 \quad (1)$$
$$b^2.(1 - a^2).(x^2 + y^2) = a^4 z^2 \quad (2)$$
$$(a^2 - b^2).(x^2 + y^2) = b^2 z^2 \quad (3)$$

Dans ce cas, les trois surfaces coniques (1) (2) (3) sont des cônes droits à base circulaire qui ont le même axe.

Si on opère sur une face parallèle à l'axe, $\lambda = 90°$, $sin.\ \lambda = 1$, $cos.\ \lambda = 0$; $A = a^2$, $C = 0$, et on a

$$(1 - b^2).(x^2 + y^2) = b^2 z^2 \quad (1)$$
$$a^2 x^2.(1 - b^2) + b^4 y^2.(1 - a^2) = a^2 b^4 z^2 \quad (2)$$
$$(a^2 - b^2)\, y^2 = b^2 z^2 \quad (3)$$

Dans ce second cas, la surface conique (3) se réduit à deux plans $(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} y = \pm b z$.

Nous verrons par la suite, en calculant l'intensité des rayons réfléchis, que, dans certaines circonstances, les rayons réfléchis, ordinaires ou extraordinaires, diminuent insensiblement d'intensité jusqu'à certaines limites où ils deviennent totalement invisibles ; mais comme la loi des intensités est indépendante de celle des directions, l'analyse comprend dans les formules la

position de tous les rayons, et même la direction de ceux qui échappent à la vue.

[40] J'ai observé [38] que tous les rayons incidens ordinaires compris dans l'intérieur du cristal, entre la surface conique (3) et la face réfléchissante, étoient toujours compris dans les mêmes limites, après la réflexion, et qu'ils ne pouvoient dans aucun cas se réfléchir extraordinairement. Considérons en effet le rayon ordinaire au point où sa vitesse perpendiculairement à la surface est nulle, et où on a par conséquent

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

La molécule de lumière parvenue à cette limite, acquiert de nouveau, en sens contraire, une accélération de mouvement. La vitesse qu'elle reçoit alors par l'action de la force réfringente, est exactement égale à celle qu'elle a perdue par l'action de la même force; en sorte qu'elle est réfléchie sous un angle égal à celui d'incidence. Mais, d'après les observations, nous avons vu qu'une partie des molécules réfléchies étoit soumise à l'action de la force répulsive qui produit la réfraction extraordinaire. Ainsi, en vertu de cette force, ces mêmes molécules seront repoussées vers la surface réfléchissante, mais elles ne pourront dépasser la limite à laquelle on a eu $\frac{dz}{dt} = 0$ dans le premier cas. Elles seront donc de nouveau réfléchies, et une partie s'échappera encore suivant la direction du rayon réfléchi ordinaire. Celles qui se trou-

veront pour la seconde fois soumises à la force répulsive de la réfraction extraordinaire, seront repoussées et réfléchies de nouveau en partie, suivant la loi ordinaire; en sorte qu'après un nombre indéterminé de réflexions et répulsions, elles seront toutes réfléchies suivant la loi de réflexion ordinaire : ce qui est conforme au phénomène indiqué par l'observation.

[41] Plusieurs cristaux de spath calcaire présentent, relativement à la multiplicité des images, des phénomènes particuliers que Martin a déjà décrits en partie, et qu'il regardoit comme très-étonnans. La mesure exacte de ces phénomènes m'a conduit à leur explication et à la loi suivant laquelle ils se produisent. Je vais commencer par leur description.

Lorsqu'on regarde la lumière d'une bougie à travers deux faces parallèles de ces cristaux, on aperçoit, outre les deux images principales ab (*fig.* 16), deux images secondaires $a'b'$, quelque fois quatre, $a'b'$, $a''b''$, ou six, $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$; souvent ces images secondaires sont doubles comme l'image a'', ou même triples, quadruples. Dans tous les cas ces images secondaires sont vivement colorées. Souvent une d'entre elles disparoît, telle que b', sans que l'image opposée, a', perde de son intensité. Plusieurs de ces images sont vivement colorées en jaune, tandis que d'autres le sont en bleu, en vert, etc. Si on fait varier la position du cristal, les images d'abord colorées en jaune passent au vert, au bleu, au violet, au rouge ou réciproquement. Leur

coloration parcourt, pendant le mouvement du rhomboïde, toutes les couleurs du prisme, et si on continue à tourner le cristal, on les voit parcourir plusieurs fois la même série de couleurs. Cette observation m'a fait penser dès le premier moment que ce phénomène avoit quelque rapport avec celui des anneaux colorés. On sait en effet que si on applique légèrement un objectif convexe d'un grand rayon sur une lame de verre plane, il se forme autour du point de contact une série d'anneaux colorés, et que si on incline peu à peu le rayon visuel, on voit toute la série des couleurs se succéder plusieurs fois au centre; en sorte que la couleur du rayon réfléchi dépend de son angle d'incidence sur la face réfléchissante. Par des considérations semblables on voit qu'il en est de même du rayon émergent.

Les cristaux parfaitement diaphanes et sans félure, ceux même qui n'ont que des félures parallèles aux faces naturelles, ne produisent pas le phénomène que j'ai décrit; il n'est produit que par des cristaux qui ont de légères félures parallèles aux arêtes et aux grandes diagonales des rhombes, c'est-à-dire aux faces du rhomboïde dérivé dont j'ai parlé [15] et que les minéralogistes nomment équiaxe.

Après m'être complètement assuré de ce fait sur un grand nombre de cristaux, ne doutant plus que cette solution de continuité ne fût la cause du phénomène, j'ai cherché suivant quelle loi et de quelle manière elle pouvoit le produire.

J'ai fait tomber un rayon solaire *a b* sur un rhom-

boïde ayant une seule félure gh (*fig.* 17), et j'ai obtenu, outre les rayons principaux ce, $c'e'$, deux rayons secondaires df, $d'f'$ fortement colorés.

En présentant à ces rayons un second cristal parallèle au premier, j'ai reconnu que le rayon secondaire $d'f'$ étoit disposé à se réfracter extraordinairement, et le rayon df disposé à se réfracter ordinairement. J'ai observé en second lieu (*fig.* 18), que lorsque le rayon ordinaire bc traversoit le cristal au-delà de la félure gh, le rayon extraordinaire $d'f'$ s'évanouissoit, et réciproquement, lorsque le rayon extraordinaire passoit au-delà de cette félure, le rayon ordinaire df s'évanouissoit à son tour. J'en ai conclu que les rayons secondaires partoient des points où les rayons ordinaire et extraordinaire rencontroient la félure, comme cela est indiqué dans la figure 17.

Pour rendre raison de ce phénomène, supposons que les deux portions du cristal séparées par la félure soient éloignées d'une distance ik (*fig.* 19), le rayon émergent en l est réfracté ordinairement; mais parvenu en m, il est réfracté ordinairement, suivant mc, et extraordinairement suivant md'. En calculant ainsi la marche des deux rayons secondaires, on trouve qu'elle satisfait complètement aux différentes circonstances du phénomène proposé.

Lorsque l'incidence du rayon bl sur gh est plus grande que 37° 11′ 31″, la vitesse de la lumière comptée perpendiculairement à la surface gh, est moindre que celle qu'elle peut perdre par l'influence du corps à sa

sortie en l; en sorte que si la seconde face n'existoit pas, cette vitesse seroit réduite à zéro avant que le rayon soit parvenu à la limite de la sphère d'activité de la surface gh : elle croîtroit ensuite en sens contraire, et la lumière seroit réfléchie intérieurement suivant lb'; mais comme la seconde face est dans la limite de la sphère d'activité de la première, la lumière est soumise à l'attraction de cette seconde face avant d'avoir atteint le point de réflexion. Dans ce cas il est évideut que le rayon ordinaire mc est parallèle à bl; ainsi, en calculant le rayon extraordinaire md', qui répond au rayon ordinaire mc, et le rayon ordinaire $m'd$, qui répond au rayon extraordinaire $m'c'$, on a la marche que suivent les quatre rayons mce, $md'f'$, $m'c'e'$, $m'df$.

Lorsque l'angle d'incidence est moindre que 37° 17′ 31″, on parvient pour la marche des rayons au même résultat, soit qu'on suppose que la lumière se soit réfractée à la première face, soit qu'on suppose qu'elle ait été soumise aux forces qui produisent sur cette première face la réflexion partielle, et qu'elle ait été ensuite enlevée à ce genre de réflexion par l'influence des forces attractives de la seconde face.

Lorsque dans un rhomboïde (*fig.* 20) il n'existe que des félures $\varepsilon\zeta\eta\theta$ parallèles aux arêtes $\alpha\beta$, on n'obtient que deux images secondaires $a'b'$. S'il y existe aussi des félures $\varepsilon'\zeta'\eta'\theta'$ parallèles aux arêtes $\alpha\gamma$, on obtient deux autres images $a''b''$; et enfin, s'il existe des félures $\varepsilon''\zeta''\eta''\theta''$, parallèles aux arêtes $\alpha\delta$, on a les images $a'''b'''$.

Lorsqu'on a deux cassures parallèles assez éloignées

l'une de l'autre, les images secondaires sont doubles; elles sont triples pour trois félures, etc.

Si l'incidence des rayons vient à varier, ou si l'épaisseur de la lame d'air interposée dans le cristal, augmente ou diminue, les rayons des diverses couleurs sont réfléchis ou réfractés, comme cela a lieu dans le phénomène des anneaux colorés; ce qui explique la diversité de coloration des rayons secondaires.

Ainsi les phénomènes précédens se rattachent naturellement aux loix de la double réfraction, et n'en sont point une exception, comme plusieurs physiciens l'avoient pensé.

[42] En comparant les valeurs des réfractions extraordinaires observées à celles qui ont été calculées dans l'hypothèse de $a = 0.67334338$, $b = 0.60374442$, j'ai fait voir que les différences entroient toutes dans les limites des erreurs d'observation. Cependant ces valeurs de a et de b étant le *mininum* de celles obtenues [27], se trouvoient les plus défavorables à cette comparaison. Cette valeur de b est celle obtenue par la réfraction ordinaire à travers un prisme de cristal, en choisissant le rayon vert pour rayon moyen, et la valeur de a, celle déduite du rapport $\frac{a}{b}$ donné par les expériences sur la double réfraction. Pour diminuer considérablement les différences entre les résultats calculés et ceux observés, il suffisoit de prendre une moyenne entre les différentes valeurs de a et de b exposées dans le paragraphe [27].

Ces valeurs moyennes sont celles qu'il convient d'adopter. Nous aurons donc

$$a = 0.674171702 : \quad b = 0.604487105$$

On tire de la valeur de b le rapport l du sinus d'incidence au sinus de réfraction ordinaire

$$l = \frac{1}{b} = 1.654295$$

Ce nombre l représente la vitesse de la lumière dans le rayon réfracté ordinairement : La vitesse de la lumière dans l'air étant prise pour l'unité, on en conclue

$$k^2 = l^2 - 1 = \frac{1 - b^2}{b^2} = 1.736693$$

k^2 étant la quantité dont le carré de la vitesse de la lumière est augmenté par l'action de la force attractive.

De la valeur de a on tire le nombre l' qui représente la vitesse de la lumière dans le rayon extraordinaire lorsqu'il est perpendiculaire à l'axe du cristal

$$l' = \frac{1}{a} = 1.4833015$$

Ce nombre indique la moindre vitesse de la lumière réfractée extraordinairement. Ces vitesses seront donc comprises entre 1.654295 et 1.4833015; et la plus grande différence entre la vitesse du rayon ordinaire et celle du rayon extraordinaire sera 0.1709935.

Cette valeur de l' donne la quantité k'^2, dont le carré de la vitesse de la lumière est diminuée par l'action de

de la force répulsive, lorsque le rayon est perpendiculaire à l'axe

$$k'^2 = l^2 - l'^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0.536510$$

On aura donc en général pour l'expression du carré de la vitesse de la lumière réfractée extraordinairement par le spath d'Islande,

$$u^2 = 1 + k^2 - k'^2 . sin^2 . \mu = 2.736693 - 0.536510 . sin^2 . \mu$$

μ étant l'angle que le rayon extraordinaire fait avec l'axe du cristal.

Enfin on aura dans tous les cas les directions du rayon extraordinaire réfracté par les faces naturelles ou artificielles, en substituant dans les expressions générales (A') (22), les valeurs de a et b que nous venons de déterminer.

La pesanteur spécifique du spath d'Islande étant 2.71409, on aura la force réfractive absolue E,

$$E = \frac{k^2}{2.71409} = \frac{1.736693}{2.71409} = 0.6398806$$

Celui de l'air étant, d'après M. Biot	0.455449
Celui de l'eau, d'après mes expériences	0.78457
Celui de la cire d'abeille, d'après mes expériences . . .	1.3308
Celui du diamant, d'après mes expériences, ...	1.39645

La force répulsive E' sera

$$E' = \frac{k'^2}{2.71409} = \frac{0.536510}{2.71409} = 0.197675$$

Les valeurs des constantes a et b que nous avons déterminées, sont celles qui appartiennent au rayon moyen du spectre; mais lorsqu'un faisceau de rayons parallèles est réfracté ordinairement ou extraordinairement, il forme après la réfraction une gerbe colorée dont la dispersion dépend de la différence d'action qu'ont éprouvé les divers rayons qui le composent. Chaque rayon coloré homogène répond à une valeur particulière de a et de b, et la différence de ces valeurs, prise pour les rayons extrêmes, mesure la dispersion.

Afin de déterminer ces valeurs extrêmes, on taille un prisme de cristal de manière à ce que les faces soient parallèles à l'axe. On observe alors la réfraction des rayons extrêmes par le moyen indiqué dans le paragraphe [3] : mais comme l'intensité des couleurs décroît lentement vers les bords du spectre coloré, il est difficile d'assigner la limite des rayons extrêmes, et il est même certain que le spectre se prolonge bien au-delà des limites des rayons sensibles à l'œil le plus exercé. Ce genre d'observation n'est donc pas susceptible d'une grande exactitude; et comme il est étranger à l'objet principal de ce mémoire, je me contenterai de rapporter ici un phénomène qui a paru long-temps inexplicable, et qui, déduit de notre analyse, donne directement une équation de condition entre les élémens de la dispersion.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe perpendiculairement à la face naturelle d'un rhomboïde de spath d'Islande, le rayon réfracté ordinaire n'est pas dispersé;

il pénètre le cristal dans la direction du rayon incident : mais le rayon extraordinaire est brisé et dispersé de manière que les rayons violets sont ceux qui s'écartent le plus de la perpendiculaire.

Si on incline de quelques degrés le rayon incident dans la section principale, le rayon ordinaire est brisé, ainsi que le rayon extraordinaire ; mais dans le rayon ordinaire ce sont les rayons rouges qui sont le plus écarté de la normale, et dans le rayon extraordinaire ce sont les rayons violets. Enfin, quand le rayon incident est d'environ 16° 45′, les rayons extraordinaires cessent d'être brisés en pénétrant dans le cristal ; mais ils continuent à être dispersés : en sorte que dans cette limite il existe un angle particulier pour lequel chaque rayon du spectre n'éprouve aucune réfraction ; les rayons violets continuent toujours à être plus éloignés de la normale que les rayons rouges. Enfin, sous un angle d'incidence d'environ 40 degrés, le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire sont brisés l'un et l'autre ; mais le rayon extraordinaire n'est pas sensiblement dispersé. Enfin au-delà de cette limite ils sont réfractés et dispersés tous les deux, et dans l'un et l'autre ce sont les rayons rouges qui sont les plus écartés de la normale.

Ces différens phénomènes se déduisent facilement de la théorie que j'ai exposée. En effet, si dans l'équation

$$tang.\ \theta' = \frac{a^2 b^2 .\ sin.\ \theta}{A.\ (A - a^2 b^2 .\ sin^2 .\ \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

qui donne l'angle de réfraction extraordinaire θ' en fonc-

tion de l'angle d'incidence θ, on fait $\theta' = \theta$, on aura

$$(A.\,tang.\,\theta - C).\,(A - a^2b^2.\,sin^2.\,\theta)^{\frac{1}{2}} = a^2b^2.\,sin.\,\theta$$

équation qui donne l'angle d'incidence θ pour lequel un rayon correspondant aux nombres a, b, ne sera pas réfracté et pénétrera le cristal sans être dévié. Or, comme à chaque rayon coloré répond une valeur particulière de a et de b, on voit pourquoi le faisceau lumineux continue à être dispersé lorsque son axe n'est pas brisé par la réfraction.

Quant à la circonstance où le faisceau extraordinaire est brisé, et où néanmoins sa dispersion n'est pas sensible, on la déterminera en nommant $a'b'$, $a''b''$ les valeurs de a, b correspondantes aux rayons rouges extrêmes et aux rayons violets extrêmes; et en égalant entre elles les valeurs de l'angle de réfraction extraordinaire: ce qui donnera

$$\frac{a'^2b'^2.\,sin.\,\theta}{A'.(A' - a'^2b'^2.\,sin^2.\,\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C'}{A'} = \frac{a''^2b''^2.\,sin.\,\theta}{A''.(A'' - a''^2b''^2.\,sin.\,\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C''}{A''}$$

Si on connoît les valeurs de $a'b'$, $a''b''$, on en déduira directement la valeur θ de l'angle d'incidence sous lequel le phénomène a lieu. J'ai observé cet angle sous un cristal dont l'épaisseur étoit 0.164 mètre, et je l'ai trouvé d'environ 40 degrés. En substituant dans l'équation précédente cette valeur de θ, on aura une équation de condition entre les valeurs de $a'b'$, $a''b''$, qui servira à les vérifier quand on les aura obtenues par la première méthode que j'ai indiquée.

On voit évidemment, d'après la forme des expressions de l'angle de réfraction extraordinaire, qu'au-delà de la limite que je viens d'indiquer, l'ordre des rayons colorés sera renversé, et il continuera jusqu'à $\theta = 90^\circ$ à être semblable à celui qu'on observe dans le rayon ordinaire. Ainsi ce phénomène, qui étoit un des plus extraordinaires de la double réfraction, est une conséquence naturelle de la loi que nous avons exposée.

CHAPITRE TROISIÈME.

Des nouvelles propriétés physiques que la lumière acquiert par l'influence des corps qui la réfractent ou la réfléchissent.

[43] Lorsqu'un rayon de lumière est divisé par un rhomboïde de spath d'Islande, les deux rayons émergens acquièrent une propriété qui les distingue essentiellement de la lumière directe. Si ces rayons tombent perpendiculairement sur un second rhomboïde dont toutes les faces soient parallèles au premier, ils ne sont plus susceptibles de se diviser. Le rayon, qui provient de la réfraction ordinaire du premier cristal, se réfracte ordinairement dans le second; et de même, le rayon qui provient de la réfraction extraordinaire du premier cristal, est réfracté extraordinairement par le second; en sorte qu'il n'y a que deux rayons émergens du second cristal.

Lorsque les sections principales sont à angle droit, le rayon qui provient de la réfraction ordinaire du premier cristal, est réfracté extraordinairement par le second, et réciproquement. Dans ce cas, comme dans le précédent, il n'y a que deux rayons émergens; mais dans toutes les positions intermédiaires aux deux limites précédentes, les rayons qui proviennent de la réfraction du premier cristal se divisent chacun en deux autres dans le second; ce qui produit quatre rayons émergens.

La quantité de lumière contenue dans chacun de ces

quatre rayons est variable ; elle dépend de l'angle compris entre les sections principales.

Nous n'examinerons d'abord que le cas le plus simple dans lequel le rayon incident est perpendiculaire à la face du premier rhomboïde ; nous verrons ensuite comment le calcul se modifie lorsque le rayon incident est incliné sur les surfaces réfringentes.

Nous nommerons :

o le rayon réfracté ordinairement par le premier cristal ;

e le rayon réfracté extraordinairement par le même cristal ;

oo le rayon réfracté ordinaire du premier cristal, réfracté ordinairement par le second ;

oe le rayon réfracté ordinaire du premier cristal, réfracté extraordinairement par le second ;

ee le rayon réfracté réfracté extraordinaire du premier cristal, réfracté extraordinairement par le second ;

eo le rayon réfracté extraordinaire du premier cristal, réfracté ordinairement par le second.

Cela posé, si on représente par Q la quantité de lumière contenue dans le rayon incident, par $(1 - m)\,Q$ la quantité de lumière absorbée par le premier cristal : mQ exprimera la quantité de lumière contenue dans les deux rayons émergens. Or si on nomme F l'intensité de la lumière, $\overset{o}{F}$ celle du rayon émergent ordinaire, $\overset{e}{F}$ celle du rayon émergent extraordinaire, on aura sensiblement

$$\overset{o}{F} = \frac{mQ}{2}; \quad \overset{e}{F} = \frac{mQ}{2}$$

La quantité de lumière contenue dans les quatre rayons émergens du second rhomboïde sera $m^2 Q$; et si on nomme i l'angle compris entre les sections principales des deux cristaux, les intensités seront représentées par

$$\overset{oo}{F} = \frac{m^2 Q.\ cos^2.\ i}{2}; \quad \overset{oe}{F} = \frac{m^2 Q.\ sin^2.\ i}{2}$$

$$\overset{ee}{F} = \frac{m^2 Q.\ cos^2.\ i}{2}; \quad \overset{eo}{F} = \frac{m^2 Q.\ sin^2.\ i}{2}$$

Lorsque les sections principales sont parallèles, on a $sin.\ i = 0$. Le second et le quatrième rayon disparoissent; et lorsque les sections principales sont à angle droit, $cos.\ i = 0$, le premier et le troisième rayon disparoissent : ce qui est conforme à notre première expérience.

[44] Lorsque le rayon incident n'est pas perpendiculaire à la face du premier rhomboïde, les intensités de la lumière s'éloignent des valeurs précédentes; elles sont fonctions de l'angle d'incidence et de l'angle que le rayon forme avec les sections principales.

Dans ce cas on détermine les quantités $\overset{oo}{F}$, $\overset{oe}{F}$, etc. de la manière suivante. Concevons le plan qui passe par le rayon réfracté o du premier rhomboïde et l'axe de ce cristal, et le plan qui passe par le rayon oe et l'axe du

second cristal. Si on nomme ε l'angle compris entre ces deux plans, on aura

$$\overset{oo}{F} = m\overset{o}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon\ ;\quad \overset{oe}{F} = n\overset{o}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon$$

Concevons de même le plan qui passe par le rayon e et l'axe du premier cristal, et le plan qui passe par le rayon eo et l'axe du second cristal. Si on nomme ε' l'angle compris entre ces deux plans, on aura

$$\overset{ee}{F} = m'\overset{e}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon'\ ;\quad \overset{eo}{F} = n'\overset{e}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon'$$

m, n, m', n' étant des coefficiens dépendans de la lumière perdue par la réflexion partielle, circonstance que nous développerons plus bas. Ces coefficiens sont à peu près égaux lorsque l'angle d'incidence est peu considérable.

Commençons par le cas le plus simple, celui où les deux rhomboïdes superposés ont leurs sections principales et leurs axes parallèles. Les axes de ces deux rhomboïdes seront parallèles à une même ligne, et on aura

$$\left.\begin{aligned} x &= -z.\ tang.\ \lambda \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Direction de l'axe des deux cristaux.

$$\left.\begin{aligned} x &= z.\ tang.\ \theta.\ cos.\ \varpi \\ y &= z.\ tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi \end{aligned}\right\}$$ Équation du rayon incident.

$$\left.\begin{aligned} x &= z.\ tang.\ \theta.\ cos.\ \varpi \\ y &= z.\ tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi \end{aligned}\right\}$$ Équation du rayon réfracté ordinaire o ou oo ou eo.

$$\left.\begin{aligned} x &= z.\ tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' \\ y &= z.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' \end{aligned}\right\}$$ Équation du rayon réfracté extraordinaire e ou ee ou oe.

équations dans lesquelles

$$tang.\,\theta = \frac{sin.\,\theta}{(cos^2.\,\theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$tang.\,\theta'.\,cos.\,\varpi' = \frac{a^2 b^2.\,sin.\,\theta.\,cos.\,\varpi}{A.[A - a^2.sin^2.\theta.(b^2.cos^2.\varpi + A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{c}{A}$$

$$tang.\,\theta'.\,sin.\,\varpi' = \frac{a^2.\,sin.\,\theta.\,sin.\,\varpi}{[A - a^2.sin^2.\theta.(b^2.cos^2.\varpi + A.sin^2.\varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

Dans le cas qui nous occupe les rayons oo et eo sont parallèles au rayon o, et les rayons oe, ee, au rayon e; en sorte que $\varepsilon' = \varepsilon$. Et pour avoir l'angle ε il faudra considérer simplement les plans qui passent par l'axe et les deux lignes o et e. Or le plan qui passe par l'axe du cristal et le rayon réfracté o, a pour équation

$$-tang.\,\lambda.tang.\,\theta.sin.\,\varpi.z = tang.\,\theta.sin.\,\varpi.x - (tang.\,\lambda + tang.\,\theta.cos.\,\varpi).y$$

Celui qui passe par le même axe et le rayon réfracté e a pour équation

$$-tang.\,\lambda.tang.\,\theta'.sin.\,\varpi'.z = tang.\,\theta'.sin.\,\varpi'.x - (tang.\,\lambda + tang.\,\theta'.cos.\,\varpi').y$$

et on a pour cosinus de l'angle ε compris entre ces deux plans.

$$cos.\,\varepsilon = \frac{tang.\,\theta.tang.\,\theta'.sin.\,\varpi.sin.\,\varpi' + (sin.\,\lambda + cos.\,\lambda.tang.\,\theta.cos.\,\varpi).(sin.\,\lambda + cos.\,\lambda.tang.\,\theta'.cos.\,\varpi')}{[tang^2.\,\theta.sin^2.\,\varpi + (sin.\,\lambda + cos.\,\lambda.tang.\,\theta.cos.\,\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}.[tang^2.\,\theta'.sin^2.\,\varpi' + (sin.\,\lambda + cos.\,\lambda.tang.\,\theta'.cos.\,\varpi')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Lorsque l'angle d'incidence est nul, on a

$$sin.\,\theta = 0\,;\quad tang.\,\theta = 0$$

$$tang.\,\theta'.\,cos.\,\varpi' = \frac{c}{A}\,;\quad tang.\,\theta'.\,sin.\,\varpi' = 0$$

d'où on conclue

$$cos.\,\varepsilon = 1\,;\quad \overset{oo}{F} = m\overset{o}{F}\,;\quad \overset{oe}{F} = 0\,;\quad \overset{ee}{F} = m'\overset{e}{F}\,;\quad \overset{eo}{F} = 0$$

En général, quel que soit l'angle d'incidence, lorsque le rayon incident est parallèle à la section principale, on parvient encore au même résultat, car on a

$$sin.\ \varpi = 0\,;\quad sin.\ \varpi' = 0$$

d'où on tire

$$cos.\ \xi = 1\,;\quad sin.\ \varepsilon = 0$$

Donc toutes les fois que le rayon incident est parallèle à la section principale, le rayon réfracté ordinairement par le premier cristal n'est pas divisé par le second, il est réfracté en un seul rayon ordinaire. Réciproquement le rayon réfracté extraordinairement par le premier cristal, est réfracté par le second en un seul rayon extraordinaire. Dans toutes les autres positions, les rayons provenant de la réfraction ordinaire ou extraordinaire du premier cristal, sont divisés en deux par le second; en sorte qu'on obtient quatre rayons émergens.

Supposons le plan d'incidence perpendiculaire à celui de la section principale, et l'angle d'incidence de 90°, on aura

$$sin.\ \varpi = 1\,;\quad sin.\ \theta = 1\,;\quad tang.\ \theta = \frac{1}{k}$$

$$tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = \frac{C}{A}\,;\quad tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = \frac{a^2}{A^{\frac{1}{2}}\,(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et par conséquent

$$cos.\ \varepsilon = \frac{0.729857 + 0.547591}{(1.068991)^{\frac{1}{2}}.\ (1.533124)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\overset{oo}{F} = m\overset{o}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon = m\overset{o}{F}\ 0.995715$$
$$\overset{oe}{F} = n\overset{o}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon = n\overset{o}{F}\ 0.004285$$
$$\overset{ee}{F} = m'\overset{e}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon' = m'\overset{e}{F}\ 0.995715$$
$$\overset{eo}{F} = n'\overset{e}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon' = n'\overset{e}{F}\ 0.004285$$

Les coefficiens de m, n, m', n' sont fonctions des angles d'incidence de chaque rayon sur les surfaces qu'ils traversent, puisqu'ils sont relatifs à la quantité de lumière éteinte ou perdue par la réflexion partielle. Or, dans le cas qui nous occupe, les rayons oo, eo rencontrant la surface d'émergence du second cristal sous le même angle que le rayon o a rencontré la surface du premier; et de même les rayons ee, oe rencontrant la surface d'émergence du second cristal sous le même angle que le rayon e a rencontré celle du premier, il est clair qu'en prenant pour unité l'intensité de la lumière dans le rayon incident sur le premier rhomboïde, on aura

$$m = n' = \overset{o}{F};\quad m' = n = \overset{e}{F}.$$

et comme l'expérience donne $\overset{e}{F} = \frac{\overset{o}{F}}{3}$ environ, on aura

$$\overset{oo}{F} = \overset{o}{F}^2.\ 0.995715;\quad \overset{oe}{F} = \overset{o}{F}^2.\ \frac{0.004285}{3}$$
$$\overset{ee}{F} = \overset{o}{F}^2.\ \frac{0.995715}{9};\quad \overset{eo}{F} = \overset{o}{F}^2.\ \frac{0.004285}{3}$$

On voit, d'après les expressions précédentes, que l'in-

tensité des rayons oe, eo, lorsqu'elle est à son *maximum*, est toujours beaucoup moindre que celle des rayons oo, ee, même quand on néglige la perte de lumière due à la réflexion partielle. C'est ce qui a fait penser aux physiciens qui ont écrit sur cette matière, que l'intensité de ces rayons étoit nulle, et que, quelle que soit l'incidence, lorsque les sections principales et les axes des deux rhomboïdes étoient parallèles, les rayons émergens du premier n'étoient pas divisés par le second. Cependant, en employant une lumière vive, on s'aperçoit bientôt que la théorie est parfaitement d'accord avec l'observation.

Lorsque les sections principales sont parallèles et les axes situés en sens contraire, l'équation de l'axe du second cristal est

$$x = z.\ tang.\ \lambda\ ;\quad y = o$$

et celle du rayon oe,

$$x = z.\ tang.\ \theta''.\ cos.\ \varpi''\ ;\quad y = z.\ tang.\ \theta''.\ sin.\ \varpi''$$

$$tang.\ \theta''.\ cos.\ \varpi'' = \frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{A.\left[A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{c}{A}$$

$$tang.\ \theta''.\ sin.\ \varpi'' = \frac{a^2.\ sin.\ \theta\ \ sin.\ \varpi}{\left[A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Or le plan qui passe par le rayon o et l'axe du premier cristal, a pour équation

$$-tang.\ \lambda.\ tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi.\ z = tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi.\ x - (tang.\ \lambda + tang.\ \theta.\ cos.\ \varpi)\ y$$

Celui qui passe par l'axe du second cristal et le rayon réfracté oe, a pour équation

$$tang.\lambda.tang.\theta''.sin.\varpi''.z = tang.\theta''.sin.\varpi''.x + (tang.\lambda - tang.\theta''.cos.\varpi'' y)$$

Donc l'expression de *cos.* ε devient

$$cos.\varepsilon = \frac{(cos^2.\lambda - sin^2.\lambda).tang.\theta.tang.\theta''.sin.\varpi.sin\,\varpi'' - (sin.\lambda + cos.\lambda.tang.\theta.cos.\varpi).(sin.\lambda - cos.\lambda.tang.\theta''.cos.\varpi'')}{[tang^2.\theta.sin^2.\varpi + (sin.\lambda + cos.\lambda.tang.\theta.cos.\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}\,[tang^2.\theta''.sin^2.\varpi'' + (sin.\lambda - cos.\lambda.tang.\theta''.cos.\varpi'')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Le plan qui passe par le rayon *e* et l'axe du premier cristal, a pour équation

$$-tang.\lambda.tang.\theta'.sin.\varpi'.z = tang.\theta'.sin.\varpi'.x - (tang.\lambda + tang.\theta'.cos.\varpi')y$$

Celui qui passe par le rayon *e o* et l'axe du second cristal, a pour équation

$$tang.\lambda.tang.\theta.sin.\varpi.z = tang.\theta.sin.\varpi.x + (tang.\lambda - tang.\theta.cos.\varpi)$$

Donc

$$cos.\varepsilon' = \frac{(cos^2.\lambda - sin^2.\lambda).tang.\theta.tang.\theta'.sin.\varpi.sin.\varpi' - (sin.\lambda - cos.\lambda.tang.\theta.cos.\varpi).(sin.\lambda + cos.\lambda.tang.\theta'.cos.\varpi')}{[tang^2.\theta.sin^2.\varpi + (sin.\lambda - cos.\lambda.tang.\theta.cos.\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}.[tang^2.\theta'.sin^2.\varpi' + (sin.\lambda + cos.\lambda.tang.\theta'.cos.\varpi')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Lorsque le rayon incident est parallèle à la section principale, on a, quel que soit l'angle d'incidence,

$$sin.\varpi = 0;\quad sin.\varpi' = 0;\quad sin.\varpi'' = 0$$

d'où on conclue

$$cos.\varepsilon = 1;\quad cos.\varepsilon' = 1$$

et par conséquent

$$\overset{oc}{F} = n\overset{o}{F}.sin^2.\varepsilon = 0;\quad \overset{eo}{F} = n\overset{o}{F}.sin^2.\varepsilon' = 0$$

Ainsi, dans ce cas, les rayons émergens du premier cristal ne sont pas divisés par le second. Ils sont réfractés par celui-ci ordinairement ou extraordinairement, suivant

qu'ils ont été réfractés par le premier ordinairement ou extraordinairement; en sorte qu'on n'obtient que deux rayons émergens : ce qui est confirmé par l'expérience.

Supposons le plan d'incidence perpendiculaire à celui de la section principale, et l'angle d'incidence de 90°, on aura

$$sin.\ \varpi = 1\ ;\quad sin.\ \theta = 1\ ;\quad tang.\ \theta = \frac{1}{k}$$

$$tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = tang.\ \theta''.\ sin.\ \varpi'' = \frac{a^2}{A^{\frac{1}{2}}.\ (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = \frac{C}{A}\ ;\quad tang.\theta''.cos.\varpi'' = -\frac{C}{A}$$

$$cos.\ \varepsilon = cos.\ \varepsilon' = \frac{0.009949 - 0.547591}{(1.068991)^{\frac{1}{2}}.\ (1.533124)^{\frac{1}{2}}} = 0.419969$$

$$\overset{oo}{F} = m\overset{o}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon = m\overset{o}{F}.\ 0.176374$$

$$\overset{oe}{F} = n\overset{o}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon = n\overset{o}{F}.\ 0.823626$$

$$\overset{ee}{F} = m'\overset{e}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon' = m'\overset{e}{F}.\ 0.176374$$

$$\overset{eo}{F} = n'\overset{e}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon' = n'\overset{e}{F}.\ 0.823626$$

Or, dans ce cas-ci comme dans le précédent, on a

$$m = n' = \overset{o}{F}\ ;\quad m' = n = \overset{e}{F}\quad \text{et}\quad \overset{e}{F} = \frac{\overset{o}{F}}{3}$$

Donc

$$\overset{oo}{F} = \overset{o}{F}^2.\ 0.176374\ ;\quad \overset{oe}{F} = \overset{o}{F}^2.\ \frac{0.823626}{3}$$

$$\overset{ee}{F} = \overset{o}{F}^2.\ \frac{0.176374}{9}\ ;\quad \overset{ee}{F} = \overset{o}{F}^2.\ \frac{0.823626}{3}$$

On voit par ces expressions que le *maximum* d'inten-

sité des rayons oe, eo est beaucoup plus grand lorsque les sections principales sont parallèles et les axes situés en sens contraire, que dans le cas où les axes sont parallèles; ce qui est en effet confirmé par l'observation.

[45] Considérons actuellement deux rhomboïdes superposés dont les sections principales ne sont plus parallèles et comprennent un angle i. Supposons le plan des xz dans la section principale du rhomboïde supérieur.

L'axe du premier cristal aura pour équation

$$x = -z.\ tang.\ \lambda;\quad y = 0$$

celui du second.

$$x = -z.\ tang.\ \lambda.\ cos.\ i;\quad y = -z.\ tang.\ \lambda.\ sin.\ i$$

l'équation du rayon o, oo, eo sera

$$x = z.\ tang.\ \theta.\ cos.\ \varpi;\ y = z.\ tang.\ \theta.\ sin.\ \varpi.\quad (o)\ (oo)\ (eo)$$

celle du rayon e sera

$$x = z.\ tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi';\quad y = z.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi'.\qquad (e)$$

et celles du rayon ee, oe,

$$x = z.\ tang.\ \theta''.\ cos.\ \varpi'';\ y = z.\ tang.\ \theta''.\ sin.\ \varpi''.\quad (ee)\ (oe)$$

équations dans lesquelles

$$tang.\ \theta = \frac{sin.\ \theta}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = \frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{A.\ [A - a^2.\ sin^2.\ \theta\ \ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{c}{A}$$

$$tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = \frac{a^2.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{[A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$tang.\theta''.cos.\varpi'' = \frac{a^2b^2.sin.\theta.cos.(\varpi-i).cos.i - a^2A.sin.\theta.sin.(\varpi-i).sin.i}{A.\{A-a^2.sin^2.\theta.[b^2.cos^2.(\varpi-i)+A.sin^2.(\varpi-i)]\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{C.co}{A}$$

$$tang.\theta''.sin.\varpi'' = \frac{a^2b^2.sin.\theta.cos.(\varpi-i).sin.i + a^2A.sin.\theta.sin.(\varpi-i).cos.i}{A.\{A-a^2.sin^2.\theta.[b^2.cos^2.(\varpi-i)+A.sin^2.(\varpi-i)]\}} + \frac{C.si}{A}$$

On aura alors l'expression des angles ε, ε' en fonction des angles θ, ϖ, i, au moyen des deux équations

$$\varepsilon = \frac{tang^2\lambda'.tang.\theta.sin.\varpi.tang.\theta''.sin.(\varpi-i)+tang.\theta.sin.\varpi.(tang.\theta''.sin.\varpi''+tang.\lambda.sin.i)+(tang.\lambda+tang.\theta.cos.\varpi).(t.\lambda.cos.i+t.}{[tang^2.\theta.sin^2.\varpi.(1+tang^2.\lambda)+(tang.\lambda+tang.\theta.cos.\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}.[t^2.\lambda.t^2.\theta''.sin^2.(\varpi''-i)+(t.\lambda\ sin.i+t.\theta''.sin.\varpi'')^2+(t.\lambda.cos.i+t.\theta''.}$$

$$\varepsilon' = \frac{tang^2.\lambda.tang.\theta'.sin.\varpi'.tang.\theta\ sin.(\varpi-i)+tang\ \theta'.sin\ \varpi'.(tang.\lambda.sin.i+tang.\theta.sin.\varpi)+(tang\ \lambda+tang.\theta'.cos\ \varpi').(t.\theta.cos.}{[tang^2.\theta'.sin^2.\varpi'.(1+tang^2.\lambda)+(tang.\lambda+tang.\theta'.cos.\varpi')^2]^{\frac{1}{2}}.[tang^2.\lambda.tang^2.\theta.sin^2.(\varpi-i)+(t.\lambda.sin.i+t.\theta.sin.\varpi)^2+(t.\lambda.cos.i+t.}$$

Ces expressions substituées dans les équations

$$\overset{oo}{F} = m\overset{o}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon;\quad \overset{oe}{F} = n\overset{o}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon$$

$$\overset{ee}{F} = m'\overset{e}{F}.\ cos^2.\ \varepsilon';\quad \overset{eo}{F} = n'\overset{e}{F}.\ sin^2.\ \varepsilon'$$

donneront dans tous les cas les intensités des rayons réfractés. Si on fait dans les expressions précédentes $\theta = 0$ on a $cos.\ \varepsilon = cos.\ \varepsilon' = cos.\ i$; ce qui les réduit à celles du paragraphe [43].

Lorsque les deux cristaux n'ont pas la forme rhomboïdale, et sont par conséquent terminés par des faces artificielles, on obtient des résultats analogues en déterminant les valeurs de θ, θ', θ'', ϖ, ϖ', ϖ'' par la méthode indiquée dans le paragraphe [35].

[46] Lorsqu'on fait tomber un rayon de lumière sur un rhomboïde de spath calcaire, les rayons réfléchis intérieurement par la seconde face sont au nombre de quatre, comme nous l'avons vu par les expériences [11].

J'ai donné [33] la loi analytique suivant laquelle s'opère ces réflexions ; mais l'intensité des rayons réfléchis est soumise à une loi particulière dont je vais m'occuper. Je ne considérerai les rayons réfléchis qu'après leur émergence du cristal, et je désignerai ces rayons de la manière suivante, o exprimant toujours le rayon réfracté ordinaire, et e le rayon réfracté extraordinaire :

oO, rayon réfracté ordinaire réfléchi ordinairement;

oE, rayon réfracté ordinaire réfléchi extraordinairement ;

eE, rayon réfracté extraordinaire réfléchi extraordinairement ;

eO, rayon réfracté extraordinaire réfléchi ordinairement.

Cela posé, si on conçoit un plan passant par le rayon o et l'axe du cristal, et un second plan passant par le rayon oE et le même axe ; le carré du cosinus de l'angle ε compris entre ces deux plans, sera le coefficient relatif à l'intensité du rayon oO, et le carré du sinus du même angle, le coefficient relatif au rayon oE.

Si on conçoit également un plan passant par le rayon e et l'axe du cristal, et un second plan passant par le rayon O et le même axe, le carré du cosinus de l'angle ε' compris entre ces deux plans, sera le coefficient relatif à l'intensité du rayon eE, et le carré du sinus du même angle, le coefficient relatif au rayon eE.

Soit donc, comme précédemment,

$$x = -z.\ tang.\ \lambda ;\quad y = o$$

les équations de l'axe du cristal, on aura

$$\left.\begin{aligned} x &= z.\ tang.\ {}'\theta.\ cos.\ \varpi \\ y &= z.\ tang.\ {}'\theta.\ sin.\ \varpi \end{aligned}\right\}\ \text{Direction du rayon } (o)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= z.\ tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' \\ y &= z.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' \end{aligned}\right\}\ \text{Direction du rayon } (e)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\,z.\ tang.\ {}'\theta.\ cos.\ \varpi \\ y &= -\,z.\ tang.\ {}'\theta.\ sin.\ \varpi \end{aligned}\right\}\ \text{Direction du rayon } (oO)\,(eO)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= z.\left(-\,tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' + \frac{2C}{A}\right) \\ y &= -\,z.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' \end{aligned}\right\}\ \text{Direction du rayon } (eE)\,(oE)$$

équations dans lesquelles

$$tang.\ {}'\theta = \frac{sin.\ \theta}{(cos^2.\ \theta + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$tang.\ \theta'.\ cos.\ \varpi' = \frac{a^2 b^2.\ sin.\ \theta.\ cos.\ \varpi}{A.\left[A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{A}$$

$$tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' = \frac{a^2.\ sin.\ \theta.\ sin.\ \varpi}{\left[A - a^2.\ sin^2.\ \theta.\ (b^2.\ cos^2.\ \varpi + A.\ sin^2.\ \varpi)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

On tire de ces équations

$$cos.\ \varepsilon = \frac{tang.{}'\theta.\ sin.\ \varpi.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' - (sin.\ \lambda + cos.\ \lambda.\ tang.{}'\theta.\ cos.\ \varpi).\left(sin.\lambda - cos.\lambda.\ tang.\theta'.\ cos.\varpi' + \frac{2C.cos.\lambda}{A}\right)}{[tang^2.{}'\theta.sin^2.\varpi + (sin.\lambda + cos.\lambda.tang.{}'\theta.\ cos.\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}.\left[tang^2.\theta'.sin^2.\varpi' + \left(sin.\lambda - cos.\lambda.tg.\theta'.cos.\varpi' + \frac{2C.cos.\lambda}{A}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$cos.\ \varepsilon' = \frac{tang.{}'\theta.\ sin.\ \varpi.\ tang.\ \theta'.\ sin.\ \varpi' - (sin.\ \lambda - cos.\ \lambda.\ tang.{}'\theta.\ cos.\ \varpi).\ (sin.\ \lambda + cos.\ \lambda.\ tang.\theta'.\ cos.\varpi')}{[tang^2.{}'\theta.\ sin^2.\ \varpi + (sin.\lambda - cos.\lambda.tang.{}'\theta.\ cos.\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}.\ [tang^2.\theta'.\ sin^2.\varpi' + (sin.\lambda + cos.\lambda.tang.\theta'.cos.\varpi')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Si on fait dans ces équations $sin.\ \varpi = 0$, quel que soit d'ailleurs θ, on a

$$cos.\ \varepsilon = 1\ ;\quad cos.\ \varepsilon' = 1\ ;\quad sin.\ \varepsilon = 0\ ;\quad sin.\ \varepsilon' = 0$$

en sorte que l'intensité des rayons oE, eO est nulle.

Nous avons vu en effet que, dans la section principale, le rayon ordinaire étoit réfléchi en un seul rayon ordinaire, et le rayon extraordinaire en un seul rayon extraordinaire.

Si on fait $\varpi = 90°$, $\theta = 90°$,

$$\cos.\ \varepsilon = \cos.\ \varepsilon' = \frac{0{\cdot}729857 - 0{\cdot}547591}{(1{\cdot}068991)^{\frac{1}{2}}.\ (1{\cdot}533124)^{\frac{1}{2}}} = 0.142374$$

$$\cos^2.\ \varepsilon = \cos^2.\ \varepsilon' = 0.020270$$
$$\sin^2.\ \varepsilon = \sin^2.\ \varepsilon' = 0.979730$$

D'après ce qui précède on aura dans tous les cas, pour expression des intensités de chaque rayon,

$$\overset{oO}{F} = m\overset{o}{F}.\ \cos^2.\ \varepsilon;\quad \overset{oE}{F} = n\overset{o}{F}.\ \sin^2.\ \varepsilon$$
$$\overset{eE}{F} = m'\overset{e}{F}.\ \cos^2.\ \varepsilon';\quad \overset{eO}{F} = n'\overset{e}{F}.\ \sin^2.\ \varepsilon'$$

Il faut observer ici que les coefficiens m, n, m', n' ne sont pas seulement fonctions de l'angle d'incidence des rayons sur les surfaces réfléchissantes, mais qu'ils dépendent encore d'une propriété générale de la lumière qui avoit échappé jusqu'ici aux recherches des physiciens, et dont nous nous occuperons dans les paragraphes suivans.

[47] D'après les expériences que j'ai rapportées, le caractère qui distingue la lumière directe de celle qui a été soumise à l'action d'un cristal, consiste en ce que la première peut toujours être divisée en deux faisceaux, tandis que dans l'autre cette faculté dépend de l'angle compris entre les sections principales des deux cristaux.

Cette faculté de changer le caractère de la lumière et

de lui imprimer une nouvelle propriété qu'elle transporte avec elle, n'est pas particulière au spath d'Islande : je l'ai retrouvée dans toutes les substances connues qui doublent les images ; et ce qu'il y a de remarquable dans ce phénomène, c'est qu'il n'est pas nécessaire pour le produire d'employer deux cristaux de même espèce. Ainsi le second cristal, par exemple, pourroit être de carbonate de plomb ou de sulfate de barite ; le premier pourroit être un cristal de soufre, et le second un cristal de roche. Toutes ces substances se comportent entre elles de la même manière que deux rhomboïdes de spath d'Islande. En général cette disposition de la lumière à se réfracter en deux faisceaux ou en un seul, ne dépend que de la position respective de l'axe des molécules intégrantes des cristaux qu'on emploie, quels que soient d'ailleurs leurs principes chimiques et les faces naturelles ou artificielles sur lesquelles s'opère la réfraction. Ce résultat prouve que la modification que la lumière reçoit de ces différens corps est parfaitement identique.

Pour rendre plus sensibles les phénomènes que je viens de décrire, on peut regarder la flamme d'une bougie à travers deux prismes de matières différentes, donnant la double réfraction et posés l'un sur l'autre : on aura en général quatre images de la flamme. Mais si on fait tourner lentement un des prismes autour du rayon visuel, comme axe, les quatre images se réduiront à deux toutes les fois que les sections principales des faces contiguës seront parallèles ou rectangulaires. Les deux images qui disparoissent ne se confondent pas avec les

deux autres ; on les voit s'éteindre peu à peu, tandis que les autres augmentent d'intensité. Lorsque les deux sections principales sont parallèles, une des images est formée par des rayons réfractés ordinairement par les deux prismes, et la seconde par des rayons réfractés extraordinairement. Lorsque les deux sections principales sont rectangulaires, une des images est formée par des rayons réfractés ordinairement par le premier cristal et extraordinairement par le second, et l'autre image par des rayons réfractés extraordinairement par le premier cristal et ordinairement par le second. Pour que les deux images qui s'éteignent disparoissent en même temps, il faut à la rigueur que les rayons réfractés par le premier cristal soient dans la section principale de la face contiguë au second. Lorsque cette circonstance n'a pas lieu exactement, on voit une des images disparoître un moment avant la seconde ; ce qui est conforme à la théorie.

Non seulement tous les cristaux qui doublent les images peuvent donner à la lumière cette faculté d'être réfractée en deux faisceaux ou en un seul, suivant la position du cristal réfringent ; mais tous les corps diaphanes solides ou liquides, et les corps opaques eux-mêmes, peuvent imprimer aux molécules lumineuses cette singulière disposition qui sembloit être un des effets de la double réfraction.

[48] Lorsqu'un faisceau de lumière traverse une substance diaphane, une partie des rayons est réfléchie par la surface réfringente, et une autre partie par la surface

d'émergence. La cause de cette réflexion partielle a jusqu'ici échappé aux recherches des physiciens. On s'en est rarement occupé, et on n'a pas même cherché à reconnoître les modifications que la lumière éprouve dans ce singulier phénomène qui semble faire exception aux lois générales de la réfraction, et qui est aussi extraordinaire que celui de la duplication des images. Nous allons voir qu'il existe néanmoins une étroite liaison entre ces deux genres de phénomènes, et que sous certains rapports on peut les regarder comme dépendans d'une même cause, puisqu'ils présentent des effets identiques.

Nous commencerons par l'exemple le plus simple et l'expérience la plus facile à constater.

Si on fait tomber un faisceau de lumière sur la surface d'une eau stagnante et sous l'angle de 52° 45′ avec la verticale, la lumière réfléchie a tous les caractères d'un des faisceaux produits par la double réfraction d'un cristal. Elle n'est plus susceptible, comme la lumière directe, de se diviser constamment en deux faisceaux, en tombant sur un rhomboïde de spath d'Islande; et de même que dans la lumière qui a déjà éprouvé l'action d'un premier cristal, cette faculté dépend de l'angle compris entre les sections principales des deux cristaux, de même elle dépend ici de l'angle compris entre le plan de réflexion et celui de la section principale du cristal qui reçoit la lumière réfléchie. En général, dans tous les phénomènes de ce genre, le plan de réflexion remplace le plan de la section principale du premier cristal.

Si on reçoit le rayon réfléchi sur un cristal quelconque ayant la faculté de doubler les images, et dont la section principale soit parallèle au plan de réflexion, il ne sera pas divisé en deux faisceaux, comme si ç'eut été un faisceau de lumière directe; mais il sera réfracté tout entier suivant la loi ordinaire, comme si ce cristal avoit perdu la faculté de doubler les images. Si au contraire la section principale du cristal est perpendiculaire au plan de réflexion, le rayon réfléchi sera réfracté tout entier suivant la loi de la réfraction extraordinaire. Dans les positions intermédiaires, il sera divisé en deux faisceaux, suivant la même loi et dans la même proportion que s'il avoit acquis son nouveau caractère par l'influence de la double réfraction.

Le rayon réfléchi par la surface du liquide a donc, dans cette circonstance, tous les caractères du rayon ordinaire fourni par la réfraction d'un cristal dont la section principale seroit parallèle au plan de réflexion ou du rayon extraordinaire formé par un cristal dont la section principale seroit perpendiculaire à ce même plan.

Pour analyser complètement ce phénomène, j'ai disposé verticalement la section principale d'un cristal, et après avoir divisé un rayon lumineux à l'aide de la double réfraction, j'ai reçu les deux faisceaux qui en provenoient sur la surface de l'eau et sous l'angle de 52° 45′. Le rayon ordinaire, en se réfractant, a abandonné à la réflexion partielle une partie de ses molécules, comme l'eût fait un faisceau de lumière directe; mais le rayon extraordinaire a pénétré en entier le liquide.

Aucune de ses molécules n'a échappé à la réfraction; au contraire, quand la section principale du cristal étoit perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon extraordinaire produisoit seul une réflexion partielle, et le rayon ordinaire étoit réfracté en entier.

Les phénomènes dans lesquels je viens de prendre l'eau pour exemple sont les mêmes pour tous les autres corps diaphanes solides ou liquides; mais l'angle sous laquelle la lumière éprouve cette modification est variable pour chacun d'eux, et il est en général plus grand pour les corps qui réfractent davantage la lumière. Au-delà et en deçà de cette limite une partie des rayons est plus ou moins modifiée, et d'une manière analogue à ce qui se passe entre deux cristaux dont les sections principales cessent d'être parallèles ou rectangulaires.

Lorsqu'on veut prendre connoissance du phénomène principal sans le mesurer avec exactitude, il faut placer en avant d'une bougie ou le corps diaphane ou un vase contenant le liquide qu'on veut soumettre à l'expérience. On examine à travers un prisme de cristal l'image de la flamme réfléchie par la surface du corps ou du liquide. On voit généralement cette image double; mais en tournant lentement le cristal autour du rayon visuel comme axe, on s'aperçoit qu'une des images s'affoiblit, tandis que l'autre augmente d'intensité. Au-delà d'une certaine limite la première commence à augmenter d'intensité aux dépens de la seconde. Il faut saisir à peu près le point où l'intensité de la lumière d'une des images est à son *minimum*, et rapprocher ou éloigner de la

bougie le corps réfléchissant, jusqu'à ce que l'angle d'incidence soit tel que cette image disparoisse totalement. Cette distance déterminée, si on continue à faire tourner lentement le cristal, on s'apercevra qu'une des deux images s'éteindra alternativement à chaque quart de révolution.

Le phénomène que nous avons remarqué dans la lumière qui se réfléchit sous un certain angle à la surface des corps diaphanes, a lieu sous un autre angle dans les faisceaux réfléchis intérieurement à la surface d'émergence, et le sinus du premier angle est au sinus du second dans le même rapport que les sinus d'incidence et de réfraction. Ainsi, en supposant la face d'incidence et la face d'émergence parallèles, et l'angle d'incidence tel que l'exige le phénomène proposé, le rayon réfléchi à la seconde surface sera modifié de la même manière que le rayon réfléchi à la première; et si le rayon incident est tel que toutes ses molécules échappent à la réflexion partielle à la face d'entrée, elles y échapperont de même à la face de sortie. Cette nouvelle propriété de la lumière offre un moyen de mesurer d'une manière précise la quantité de rayons absorbés par les surfaces des corps diaphanes, problème que la réfraction partielle rendoit impossible à résoudre..

Nous allons calculer les conséquences auxquelles conduit l'observation que je viens de rapporter, et ce qu'on peut en déduire sur la nature des forces répulsives qui produisent la réflexion partiolle.

[49] Soient x et z les coordonnées orthogonales d'une molécule de lumière, x étant parallèle à la surface du corps réfringent; $\Pi(z)$ l'action totale du corps pour attirer la molécule située à la distance z de la surface; $\Psi(z)$ l'action de la force répulsive à la même distance.

Représentons, comme précédemment, l'angle d'incidence par θ, et par v la vitesse de la lumière dans l'air, à une distance sensible du corps.

Supposons aussi la densité du corps égale à l'unité. Comme nous n'avons à considérer que des phénomènes relatifs à la réflexion, nous négligerons dans le calcul les termes relatifs à la vitesse de la lumière parallèlement à la surface. Les forces Π et Ψ n'altèrent pas cette vitesse qui est une constante indépendante du phénomène que nous devons analyser. On aura

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \Psi(z) - \Pi(z)$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} = const. + 2\int dz.\,\Psi(z) - 2\int dz.\,\Pi(z)$$

Nommons $\frac{K'^2}{2}$ et $\frac{K^2}{2}$ les intégrales $2\int dz.\,\Psi(z)$, $2\int dz.\,\Pi(z)$, prises depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$, et observons qu'à une distance sensible du corps la vitesse de la lumière perpendiculairement à la surface est $v.\,cos.\,\theta$, l'équation précédente donnera

$$v^2.\,cos^2.\,\theta = const. + \frac{K'^2}{2} - \frac{K^2}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{dz^2}{dt^2} = v^2.cos^2.\theta + \frac{K^2}{2} - \frac{K'^2}{2} + 2\int dz.\Psi(z) - 2\int dz.\Pi(z)$$

Or si on nomme μ, ν deux nombres compris entre o et 1, on aura, quand la molécule de lumière sera parvenue à une distance z du corps,

$$2\int dz.\ \Pi\ (z) = \mu.\ \frac{K^2}{2};\quad 2\int dz.\ \Psi\ (z) = \nu.\ \frac{K'^2}{2}$$

l'équation précédente devient alors

$$\frac{dz^2}{dt^2} = v^2.\ cos^2.\ \theta + \frac{K^2}{2}.\ (1-\mu) - \frac{K'^2}{2}\ (1-\nu)$$

Enfin, lorsque la molécule lumineuse est dans la position la plus rapprochée de la surface et sur le point d'être réfléchie, $\frac{dz}{dt} = o$,

$$o = v^2.\ cos^2.\ \theta + \frac{K^2}{2}.\ (1-\mu) - \frac{K'^2}{2}.\ (1-\nu) \qquad (1)$$

Or il y a une valeur particulière de θ, μ et ν qui convient seule à la modification de la lumière que nous examinons; c'est le premier résultat de l'expérience.

Considérons actuellement un rayon réfléchi dans l'intérieur du même corps diaphane, et nommons θ' l'angle d'incidence, on aura pour une molécule comprise dans ce rayon, et parce que les forces Π et Ψ agissent dans le même sens,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \Pi\ (z) + \Psi\ (z)$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} = const. + 2\int dz.\ \Pi\ (z) + 2\int dz.\ \Psi\ (z).$$

mais à une distance sensible de la surface la vitesse de

la lumière dans l'intérieur du corps est $(v^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc

$$(v^2 + K^2).\ cos^2.\ \theta' = const. + \frac{K^2}{2} + \frac{K'^2}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{dz^2}{dt^2} = (v^2 + K^2).\ cos^2.\ \theta' - \frac{K^2}{2} - \frac{K'^2}{2} + 2\int dz.\ \Pi\ (z) + 2\int dz.\ \Psi\ (z)$$

Or si on nomme μ' et ν' deux nombres compris entre 0 et 1, on a, quand la molécule de lumière est parvenue à une distance z de la surface,

$$2\int dz.\ \Pi\ (z) = \frac{\mu' K^2}{2};\quad 2\int dz.\ \Psi\ (z) = \frac{\nu' K'^2}{2}$$

L'équation précédente devient alors

$$\frac{dz^2}{dt^2} = (v^2 + K^2).\ cos^2.\ \theta' - \frac{K^2}{2}.(1 - \mu') - \frac{K'^2}{2}.(1 - \nu')$$

Enfin, lorsque la molécule de lumière est sur le point d'être réfléchie,

$$0 = (v^2 + K^2).\ cos^2.\ \theta' - \frac{K^2}{2}.(1 - \mu') - \frac{K'^2}{2}.(1 - \nu').\quad (2)$$

Or il y a une valeur de θ', μ', ν' pour laquelle la lumière éprouve la modification proposée, et l'expérience donne entre l'angle θ relatif à la réflexion extérieure, et l'angle θ' relatif à la réflexion intérieure, lorsque la lumière est modifiée de la même manière,

$$v^2.\ cos^2.\ \theta + K^2 = (v^2 + K^2).\ cos^2.\ \theta' \qquad (3)$$

Les équations (1) (2) (3) contiennent toutes les conditions que l'expérience a données jusqu'à présent sur les forces réfléchissantes et réfringentes.

Or la quantité $\frac{K^2}{2}$ qui dépend du pouvoir réfringent de chaque corps, est un nombre fini qui, pour chaque substance, a une valeur déterminée, et on est assuré par l'expérience que la fonction $\Pi(z)$ est telle que l'intégrale $\frac{K^2}{2} = 2\int dz.\ \Pi(z)$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$, n'est pas infinie, et par conséquent qu'on n'a pas $\Pi(z) = \frac{D}{z^{\xi}}$. C'est tout ce qu'on peut savoir sur le mode d'action de cette force.

Quant à la force répulsive $\Psi(z)$ qui agit toujours sur un certain nombre de molécules, l'expérience nous apprend que la lumière reçoit la modification que j'ai exposée lorsque μ et ν ont une certaine valeur; alors la molécule lumineuse se trouve située à une certaine distance z' de la surface, et il est d'abord naturel de penser que ce phénomène dépend uniquement des valeurs de μ et ν, puisqu'il cesse de se manifester dans les autres inclinaisons lorsque μ et ν ont des valeurs différentes. On doit donc avoir dans cette hypothèse, lorsque la réflexion est intérieure, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. Si on joint ces conditions aux équations (1) (2), et si on élimine $\frac{K'^2}{2}$, on aura

$$\nu^2.\cos^2.\theta + K^2.(1-\mu) = (\upsilon + K^2).\cos^2.\theta'. \quad (4)$$

et en comparant cette équation à l'équation (3) on en

conclue $\mu = \mu' = 0$. Donc, lorsque la lumière est réfléchie, l'action attractive du milieu, comptée jusqu'à la surface, est presque totalement épuisée, tandis que la force répulsive a encore une valeur sensible; ce qui prouve que cette dernière force décroît d'une manière incomparablement plus rapide que la force réfringente.

Si on ne suppose pas que le phénomène proposé ait lieu seulement lorsque la molécule de lumière est aux mêmes distances de la surface supérieure ou inférieure du cristal, c'est-à-dire si on n'admet pas la condition $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, on peut toujours éliminer entre les équations (1) (2) (3) les angles θ et θ', ce qui donnera

$$K'^2 = K^2 . \frac{\mu + \mu'}{\nu - \nu'}$$

ce qui conduit à la même conséquence, indépendamment de toute hypothèse.

[50] Si on examine la lumière qui provient de la réflexion partielle des corps, tels que le marbre noir, le bois d'ébène, on trouve également un angle de réflexion sous lequel cette lumière jouit de la propriété de celle qui a traversé un cristal de spath d'Islande.

Les substances métalliques polies sont les seules qui ne semblent pas susceptibles de produire complètement ce phénomène, probablement parce que la lumière partielle qui a reçu cette modification est confondue avec les rayons qui proviennent de la réflexion totale. Nous examinerons plus bas l'action des miroirs métalliques sur les rayons qui ont déjà été modifiés, et nous mon-

trerons dans quelles circonstances cette modification est altérée ou conservée.

Lorsqu'un rayon a acquis cette propriété, il la conserve en traversant les corps qui réfractent simplement la lumière: il la transporte avec lui; en sorte qu'en admettant que cette modification des molécules lumineuses dépende de leurs formes, il faut, pour rendre compte des phénomènes, dire que, dans leurs réflexions ou réfractions, elles restent constamment parallèles entre elles et conservent respectivement les positions que leur a donné l'action du dernier corps qui a exercé sur elles ce genre d'influence.

[51] Après avoir observé que la lumière réfléchie sous un certain angle par la surface d'un corps diaphane, acquiert les propriétés des rayons qui ont été soumis à l'action de la double réfraction, il est facile d'en conclure qu'avec de simples corps diaphanes on peut modifier des rayons de lumière de manière à ce qu'ils échappent entièrement à la réflexion partielle qu'on remarque ordinairement à la surface de ces corps.

Lorsqu'on fait tomber un rayon solaire sur une glace polie et non étamée, ce rayon, comme nous l'avons déjà observé, est réfléchi en partie à la première et à la seconde surface, et la quantité de lumière réfléchie est d'autant plus grande que le rayon est plus incliné sur la face réfléchissante. Mais si la lumière directe est soumise à cette loi, celle qui a déjà été réfléchie suit une loi toute différente lorsqu'elle est de nouveau réfléchie

par une seconde glace. Dans certaines directions, au lieu d'augmenter d'intensité avec l'angle d'incidence, elle diminue au contraire, et après avoir atteint un certain *minimum*, elle commence à augmenter de nouveau, suivant la même loi que la lumière directe. Ces *minima* sont relatifs, soit à l'inclinaison des rayons sur les surfaces réfléchissantes, soit à l'angle que ces surfaces forment entre elles; en sorte que la lumière réfléchie par la seconde glace est fonction de ces trois angles. Cette fonction a un *minimum* absolu, c'est-à-dire pour lequel l'intensité de la lumière réfléchie par la seconde glace est absolument nulle. Nous allons montrer comment le calcul conduit directement aux circonstances qui donnent ce *minimum*.

Il faut d'abord concevoir le rayon incident tombant sur la première glace sous l'angle de 54° 35″, qui est celui sous lequel la lumière réfléchie a tous les caractères d'un rayon ordinaire ou extraordinaire fourni par la double réfraction. Ce rayon fait alors avec la surface réfléchissante un angle de 35° 25′. Si on fait tourner une seconde glace autour de ce rayon réfléchi a, de manière à ce qu'elle fasse constamment avec lui un angle de 35° 25′, et si, dans un plan perpendiculaire à ce rayon, on conçoit deux lignes : l'une b, parallèle à la première glace; l'autre c, parallèle à la seconde, la quantité de lumière réfléchie par celle-ci est proportionnelle au carré du cosinus de l'angle compris entre les deux lignes bc; elle est à son *maximum* quand ces lignes sont parallèles, et nulle quand ces lignes sont perpen-

diculaires; en sorte que les limites du phénomène se rapportent à trois axes rectangulaires $a\,b\,c$ dont l'un est parallèle à la direction du rayon, l'autre à la première surface réfléchissante, et le troisième perpendiculaire aux deux premiers.

Pour déterminer l'angle compris entre les deux glaces, lorsque la lumière, réfléchie par la première, traverse la seconde sans se réfléchir, soit $z = 0$ (1) l'équation de la première glace, et représentons l'équation du rayon incident sur cette surface par

$$y = 0; \quad x = z.\ tang.\ \theta$$

l'équation du rayon réfléchi sera

$$y = 0; \quad x = -z.\ tang.\ \theta$$

et celle de la seconde glace sera nécessairement, dans le cas proposé,

$$z.\ cos\ \theta = x.\ sin.\ \theta - y.\ tang.\ \theta \qquad (2)$$

puisque son intersection avec le plan de réflexion doit être perpendiculaire au rayon réfléchi, et l'angle compris entre sa normale et le même rayon égal à θ. Or en nommant n l'angle compris entre les deux glaces (1) (2), on aura

$$cos.\ n = cos^2.\ \theta$$

et comme θ, dans le cas proposé, est égal à $54^\circ\ 35'$,

$$log.\ cos.\ n = 9.5261342; \quad n = 70^\circ\ 22'\ 35''$$

Donc si on prend deux glaces inclinées l'une à l'autre,

de 70° 22′ 35″ ; si ensuite on conçoit entre ces deux glaces une ligne qui fasse avec l'une et l'autre un angle de 35° 25′, et dont par conséquent la projection sur l'une ou sur l'autre, fasse avec leur commune intersection un angle de 30° 5′ 35″, tout rayon réfléchi par une des glaces parallèlement à cette ligne, ne sera pas de nouveau réfléchi par la seconde, il la pénétrera sans qu'aucune de ses molécules éprouve l'action des forces répulsives qui produisent la réflexion partielle. En deçà et au-delà des angles indiqués, le phénomène cessera d'avoir lieu, et plus on s'éloignera de ces limites dans un sens ou dans l'autre, plus la quantité de lumière réfléchie augmentera.

[52] Substituons à la seconde glace un miroir métallique, et nommons $a'\,b'\,c'$ les axes rectangulaires du second rayon analogues aux axes $a\,b\,c$ du premier. Si on reçoit ce rayon sur une glace polie non étamée, et qui fasse avec lui un angle de 35° 25′, on remarque les phénomènes suivans qui sont indépendans de l'angle d'incidence sur le miroir métallique. Si b' est parallèle à b, c'est-à-dire si le miroir métallique est parallèle à l'axe b, le rayon qu'il réfléchit conserve ses propriétés par rapport à une glace située parallèlement à l'axe c', il la pénètre en entier quand elle fait avec lui un angle de 35° 25′. Si b' est parallèle à c, le rayon réfléchi conserve ses propriétés pour une glace parallèle à l'axe b'.

Dans les positions intermédiaires, la quantité de lumière qui aura conservé sa propriété pour une glace parallèle à l'axe b', est proportionnelle au carré du sinus

de l'angle compris entre les axes b', b; et celle qui a conservé sa propriété par rapport à une glace parallèle à l'axe c', est proportionnelle au carré du cosinus du même angle.

Lorsque le miroir métallique fait un angle égal avec les axes bc, b' fait avec chacun d'eux un angle de 45°. Alors la lumière se comporte de la même manière sur une glace parallèle à l'axe b' ou à l'axe c'; elle semble dans ce cas avoir repris tous les caractères de la lumière directe.

Si on dissèque le rayon réfléchi par le miroir métallique, à l'aide d'un cristal de carbonate calcaire, en disposant sa section principale parallèlement au plan de réflexion, le rapport des intensités du rayon réfracté extraordinaire et du rayon ordinaire, est égal au carré de la tangente de l'angle compris entre les deux axes b, b'.

Si on fait subir à la lumière plusieurs réflexions sur des miroirs métalliques avant de la soumettre à l'action d'un second corps diaphane, les phénomènes sont analogues à ceux que je viens d'exposer. Si l'axe b' du second rayon est parallèle à l'axe b ou c du premier; si l'axe b'' du troisième est parallèle à l'axe b' ou c' du second, et ainsi de suite, la propriété proposée de la lumière ne sera nullement altérée. Si ces axes sont inclinés les uns aux autres, elle se divisera, relativement aux deux miroirs consécutifs, suivant la loi que j'ai indiquée.

Lorsqu'on fait tourner autour de l'axe c du premier rayon réfléchi la surface d'un corps opaque poli, tel

que du marbre noir, on voit la lumière réfléchie diminuer jusqu'à une certaine limite où elle est nulle et au-delà de laquelle elle commence à reparoître.

[53] Si on transporte aux molécules lumineuses les trois axes rectangulaires *a b c* auxquels se rapportent les phénomènes que j'ai décrits; et si on suppose que l'axe *a* étant toujours dans la direction du rayon, les axes *b* ou *c* deviennent, par l'influence des forces répulsives, perpendiculaires à la direction de ces forces; alors les phénomènes de la réflexion et ceux de la double réfraction se rapportent à cette loi unique, savoir, que si on considère dans la translation des molécules lumineuses, le mouvement de leur axe *b* ou *c*, la quantité de molécules dont l'axe *b* ou *c* deviendra perpendiculaire à la direction des forces, sera proportionnelle au carré du cosinus de l'arc compris entre les deux positions successives de ces lignes.

Par exemple, lorsqu'un rayon est réfléchi par une glace sous un angle de 54° 35′, on reconnoit que toutes ses molécules sont disposées de la même manière, puisqu'en présentant perpendiculairement à ce rayon un prisme de spath d'Islande dont l'axe est dans le plan de réflexion, toutes ses molécules sont réfractées en un seul rayon ordinaire : aucune d'elles n'est réfractée extraordinairement. Dans ce cas les axes analogues de ces molécules sont tous parallèles entre eux, puisqu'elles se comportent toutes de la même manière. Nommons *b* l'axe de ces molécules qui se trouvent perpendiculaires

au plan de réflexion, aucune de celles dont l'axe *c* s'est trouvé perpendiculaire à ce plan, n'a pu être réfléchie. Donc si on présente aux molécules réfléchies, et sous le même angle, une seconde glace parallèle à leur axe *c*, elles seront dans le cas de celles qui n'ont pu être réfléchies par la première; et nous avons vu qu'en effet le rayon traverse en entier cette seconde glace. Dans ce cas les axes analogues des molécules du même rayon restent encore parallèles, après qu'il a essuyé l'action de second corps.

Supposons actuellement que la seconde glace faisant encore le même angle avec le rayon réfléchi, ne soit plus parallèle à son axe *c*. Alors elle doit nécessairement réfléchir une partie des molécules lumineuses. En effet, pour que l'axe de ces molécules devienne perpendiculaire au nouveau plan de réflexion, il aura un certain angle à décrire : la quantité de celles qui parviendront à cette position sera proportionnelle au carré du cosinus de cet angle, et pénètrera encore le second miroir; l'autre partie qui est proportionnelle au carré du sinus du même angle, tournera son axe *c* dans le plan même de réflexion, et l'axe *b* perpendiculairement à ce plan, et par cette position acquerra la faculté d'être réfléchie comme nous l'avons vu plus haut.

La réfraction extraordinaire est produite par une force répulsive dont l'action est proportionnelle au carré du sinus de l'angle compris entre l'axe du cristal et l'axe principal *a* de la molécule lumineuse. Toutes les molécules dont l'axe *b* est perpendiculaire à la direction

de cette force, sont réfractées ordinairement, et toutes celles dont l'axe *c* lui est perpendiculaire, sont réfractées extraordinairement. Les molécules réfractées ordinairement, qui échappent à la force répulsive, sont dans le cas de celles qui échappent à la réflexion dans la première classe de faits que nous venons de rapporter.

Lorsque les sections principales sont parallèles et le rayon incident parallèle à ces plans, on conçoit que soit que les axes des cristaux soient parallèles, soit qu'ils ne le soient pas, tout rayon sorti du premier cristal parallèlement à la section principale, ne sera pas divisé par le second; car son mouvement se fait autour de l'axe *b* ou de l'axe *c* qui est perpendiculaire à la direction des forces; et comme dans ce cas cet axe reste parallèle à lui-même, les molécules d'un même rayon sont toutes réfractées de la même manière, conformément à la loi générale que nous avons exposée.

[54] Tous les phénomènes ordinaires de l'optique peuvent s'expliquer, soit dans l'hypothèse d'Huyghens qui les suppose produites par les vibrations d'un fluide éthéré, soit dans l'hypothèse de Newton qui les suppose produits par l'action des corps sur les molécules lumineuses considérées elles-mêmes comme appartenant à une substance soumise aux forces attractives et répulsives qui servent à expliquer les autres phénomènes de la physique. Les lois relatives à la marche des rayons dans la double réfraction, peuvent encore s'expliquer dans l'une ou l'autre hypothèse; mais Huyghens a avoué

lui-même que son hypothèse ne suffisoit pas pour expliquer les phénomènes que présente la lumière déjà réfractée extraordinairement, lorsqu'on la soumet à l'action d'un second cristal. Les observations que j'ai rapportées [51] [52] sont encore bien plus contraires à cette hypothèse que celles qu'on connoissoit alors. En effet, si les simples phénomènes de la réflexion sont différens pour un même angle d'incidence, ce qui ne peut avoir lieu dans le système des ondulations, il faut nécessairement en conclure, non seulement que la lumière est une substance soumise aux forces qui animent les autres corps, mais encore que la forme et la disposition de ses molécules ont une grande influence sur les phénomènes.

Il est probable que toute la lumière produite par la réflexion partielle, est polarisée comme celle qui a été soumise à l'action d'un cristal; mais comme le rayon réfléchi contient à la fois les molécules qui sont polarisées dans un sens et celles qui sont polarisées dans l'autre, il présente dans sa décomposition par un prisme de spath calcaire, les mêmes propriétés qu'un rayon naturel; et ce n'est que sous l'angle de réflexion, où toutes les molécules sont polarisées de la même manière, que cette modification de la lumière devient sensible et incontestable.

La force qui polarise la lumière est en quelque sorte indépendante de celle qui produit la réfraction extraordinaire; car une molécule de lumière qui a déjà été polarisée et réfractée ordinairement ou extraordinairement, est réfractée ordinairement ou extraordinairement

de la même manière qu'une molécule de lumière directe qui tombe sous le même angle sur la surface réfringente. Les forces qui polarisent agissent également et en sens contraire sur les deux pôles de la molécule de lumière ; en sorte qu'elles n'impriment aucun mouvement à son centre de gravité. Leur action est analogue à celle que le magnétisme terrestre exerce sur un barreau aimanté.

Lorsqu'on fait réfléchir par la première surface d'un cristal de spath calcaire un rayon de lumière déjà polarisé, cette surface se comporte comme un simple corps diaphane. L'action qu'elle exerce sur la lumière est indépendante de la position de sa section principale ; ce qui sembleroit indiquer que cette réflexion s'opère hors des limites des forces polarisantes du cristal : et comme nous avons vu plus haut que cette réflexion avoit lieu à une distance très-petite de la surface, on pourroit peut-être en conclure que la lumière n'est polarisée qu'en pénétrant dans le cristal, et *il s'en suivroit nécessairement* que les forces qui produisent la réfraction extraordinaire ne commenceroient à agir qu'à cette limite. Les expériences sur la réflexion intérieure prouvent que ces forces agissent dans l'intérieur du cristal au moins jusqu'à la limite des forces réfractives ordinaires ; en sorte qu'il ne seroit pas impossible que l'action des forces répulsives, qui produisent la réfraction extraordinaire, ne commençât qu'à la limite où l'action des forces réfractives ordinaires cesse dans l'intérieur du cristal.

Nous avons vu [46] que dans la section principale

d'un rhomboïde, le rayon réfracté ordinaire se réfléchissoit en un seul faisceau ordinaire, et le rayon extraordinaire en un seul faisceau extraordinaire. Il y a dans ce phénomène une circonstance particulière qui semble lier intimement le mode d'action de la réflexion partielle avec celui de la double réfraction. L'angle d'incidence sous lequel le spath d'Islande jouit de la propriété de polariser un rayon par la réflexion partielle, est d'environ 56° 30′. Il se comporte alors comme un corps diaphane ordinaire; et quel que soit l'angle compris entre le plan d'incidence et sa section principale, le rayon réfléchi par la première surface est toujours polarisé de la même manière; si le rayon incident sous l'angle de 56° 30′ est compris dans la section principale, ce rayon, réfléchi en partie à la première surface, se divise ensuite en deux rayons réfractés. Le rayon réfracté ordinaire se réfléchit à la seconde surface en un seul faisceau ordinaire; mais le rayon extraordinaire échappe totalement à la réflexion partielle, parce que ses molécules sont disposées, par l'action même du cristal, dans la position convenable à ce genre de phénomène. En deçà et au-delà de l'angle proposé, le rayon extraordinaire est réfléchi en partie; ce qui s'accode avec la loi que nous avons exposée.

CHAPITRE QUATRIÈME.

De la double réfraction dans diverses substances qui produisent ce phénomène.

[55] Nous avons donné dans la première partie de ce Mémoire la série des substances connues qui réfractent doublement la lumière. Les résultats auxquels nous sommes parvenus en analysant ce phénomène dans le spath d'Islande, nous ont prouvé qu'il n'entre dans l'expression de la loi que deux constantes différentes pour chaque cristal. Nous avons vu en outre qu'en considérant la réfraction extraordinaire sur une face parallèle à l'axe et dans un plan perpendiculaire à cet axe, les rapports des sinus de réfraction et d'incidence étoit constant comme dans la réfraction ordinaire, et exprimé par le nombre a. Cette observation donne un moyen de calculer la constante a dans les divers cristaux; car en les coupant par deux plans parallèles à leur axe, et observant dans ce prisme, la réfraction extraordinaire, par la méthode que j'ai employée pour la réfraction ordinaire [3]; on déterminera par un même mode d'observation les deux constantes a et b.

Le quartz (cristal de roche) cristallise en prismes hexaèdres terminés par une pyramide. Sa forme primitive est un rhomboïde légèrement obtus et dont les angles compris entre les faces sont 94° 16′; 85° 44′.

J'ai taillé un prisme hexaèdre de quartz par un plan

parallèle à ses arêtes, en sorte que cette face artificielle et une des faces naturelles ont formé un nouveau prisme dont l'arête étoit parallèle à l'axe du rhomboïde primitif du cristal.

L'angle compris entre les faces du prisme a d'abord été mesuré par la réflexion des images, suivant la méthode que j'ai exposée, paragraphe [2].

L'angle g compris entre le premier signal et son image vue par réflexion, s'est trouvé

$$g = 50^\circ\ 19'\ 15''$$

L'angle h compris entre le second signal et son image vue par réflexion,

$$h = 34^\circ\ 57'$$

Enfin l'angle compris entre les deux signaux,

$$d = 90^\circ\ 51'\ 30''$$

On en conclue l'angle c compris entre les faces du prisme,

$$c = d - \frac{g+h}{2} = 90^\circ 51' 30'' - 42^\circ 38' 7''\tfrac{1}{2} = 48^\circ 13' 22''\tfrac{1}{2}$$

J'ai ensuite observé l'angle v compris entre un signal et son image vue par la réfraction ordinaire lorsqu'elle est stationnaire, et j'ai trouvé

$$v = 30^\circ\ 50'\ 42''$$

D'où on conclue le rapport l du sinus d'incidence à celui de réfraction :

$$l = \frac{\sin. \frac{c + v}{2}}{\sin. \frac{c}{2}} = \frac{\sin. 39^\circ\ 32'\ 30''\ \frac{1}{4}}{\sin. 24^\circ\ 6'\ 41''\ \frac{1}{4}} = 1.558176$$

Le nombre l représente la vitesse de la lumière dans le rayon réfracté ordinairement, celle de la lumière dans l'air étant prise pour unité. On conclue du résultat précédent le rapport b du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

$$b = \frac{1}{l} = 0.641776$$

et la quantité k^2, dont le carré de la vitesse de la lumière est augmenté par l'action de la force réfractive,

$$k^2 = l^2 - 1 = \frac{1 - b^2}{b^2} = 1.427913$$

En observant ensuite l'angle v' compris entre le même signal et son image stationnaire vue par la réfraction extraordinaire dans un plan perpendiculaire à l'axe du cristal, j'ai trouvé

$$v' = 30^\circ\ 15'\ 18''$$

Donc le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction dans le plan proposé, étoit

$$l' = \frac{\sin. \frac{c + v'}{2}}{\sin. \frac{c}{2}} = \frac{\sin. 39^\circ\ 14'\ 20''\ \frac{1}{4}}{\sin. 24^\circ\ 6'\ 41''\ \frac{1}{4}} = 1.548435$$

Ce nombre exprime la moindre vitesse que la lumière réfractée extraordinairement puisse avoir dans le cristal. Ainsi la vitesse de la lumière réfractée extraordinairement est toujours comprise entre les nombres 1.558176 et 1.548435, et la plus grande différence entre la vitesse du rayon ordinaire et celle du rayon extraordinaire est 0.009741.

On peut déduire du résultat le nombre $a = \frac{1}{l'}$:

$$a = \frac{1}{l'} = 0.645813$$

et la quantité k'^2 dont le carré de la vitesse de la lumière est diminué par l'action des forces répulsives, lorsque le rayon réfracté est perpendiculaire à l'axe du cristal.

$$k'^2 = l^2 - l'^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0.030261$$

On aura donc en général, pour expression du carré u^2 de la vitesse de la lumière réfractée extraordinairement par le cristal de roche,

$$u^2 = 1 + k^2 - k'^2 . sin^2 . \mu = 2.427913 - 0.030261 . sin^2 . \mu$$

μ étant l'angle que le rayon extraordinaire fait avec l'axe du cristal.

Les données précédentes suffisent pour donner dans tous les cas les directions du rayon extraordinaire, en substituant pour a et b leurs valeurs dans les expressions générales (7) (8) du paragraphe [22].

La densité du quartz étant 2.63717, on aura la force réfractive E:

$$E = \frac{k^2}{2.63717} = \frac{1.427913}{2.63717.} = 0.541457$$

et la force répulsive absolue

$$F' = \frac{k^2}{2.63717} = \frac{0.030261}{2.63717.} = 0.0114748$$

L'arragonite (*Arragonit*, *Arragon*, *Excentrischer Kalkstein.*) est un carbonate de chaux dont les principes constituans semblent être les mêmes que ceux du spath d'Islande; mais quoique l'analyse chimique ait toujours rencontré dans ces deux substances les mêmes élémens combinés dans les mêmes proportions, ces deux cristaux ont néanmoins des caractères physiques qui les distinguent essentiellement l'un de l'autre.

L'arragonite diffère du spath d'Islande par une pesanteur spécifique et une dureté plus grande, par un éclat plus vif, par ses cassures vitreuses et multipliées, par l'intensité de ses réfractions, et enfin par la forme de ses cristaux.

La forme la plus symétrique sous laquelle on trouve ce cristal, est celle d'un prisme droit hexaèdre dont les pans font entre eux quatre angles d'environ 116 degrés et deux de 128. D'après la description de M. Haüy (1), ce cristal est un assortiment de quatre prismes rhomboï-

(1) *Traité de minéralogie*, t. IV, p. 338.

daux $OUHT$ (*fig.* 21), le rhombe C qui reste au milieu a été rempli par la cristallisation, de manière que chacun des mêmes prismes est censé avoir reçu une extension qui équivaut à l'effet d'une loi de décroissement. On voit des groupes sur lesquels la distinction des prismes composans s'annonce par des angles rentrans situés à leur jonction.

La forme primitive est un octaèdre rectangulaire (*fig.* 22) dans lequel l'incidence de M sur M est de 115° 56′; celle de P sur P, de 109° 28′; celle de P sur M, de 107° 49′. Voici comment ces octaèdres sont disposés dans chacun des prismes rhomboïdaux $OUHT$, en commençant par le prisme O.

Si on conçoit dans le prisme O une ligne horizontale EE' faisant des angles égaux avec les faces lm, lE', cette ligne sera l'axe de l'octaèdre proposé; les quatre faces M seront verticales et projettées horizontalement suivant les quatre lignes lE, lE', nE, nE'; les quatre faces P seront projettées deux à deux, suivant les triangles lnE, lnE'.

Il suit de cette description du prisme $OUHTC$ (*fig.* 21), que dans chacun des prismes rhomboïdaux O, U, H, T, les axes EE' de la forme primitive, seront situés d'une manière différente les uns par rapport aux autres. Dans les différentes parties du prisme C, la position de l'axe sera déterminée par la loi de décroissement qu'on adoptera pour les lier au reste du groupe et à l'un ou l'autre des quatre prismes rhomboïdaux.

Cette structure du prisme de l'arragonite s'accorde

avec les phénomènes de la double réfraction, si on suppose que l'axe de réfraction n'est pas l'axe de la forme primitive; mais dans le cas contraire elle est incompatible avec les phénomènes que j'ai observés et que je vais décrire.

Plusieurs minéralogistes, frappés de l'identité des principes du spath calcaire et de l'arragonite, ont cherché à déduire leur cristallisation d'une même forme primitive; cependant les pesanteurs spécifiques étant différentes, et à peu peu près dans le rapport de 27 à 29, il est impossible de supposer que ces cristaux se rapportent à un même noyau et sont formés des mêmes molécules, décroissant seulement à la surface suivant des lois diverses. D'ailleurs M. Haüy a évidemment démontré que les formes prismatiques de l'arragonite étoient incompatibles avec celles qui se dérivent du rhomboïde du spath calcaire. Il s'est particulièrement attaché à prouver que l'angle de 128 degrés qu'on retrouve dans le spath calcaire par la subdivision du rhomboïde parallèlement à ses bords, n'offre qu'une fausse indication du rapprochement des deux substances et une simple analogie de rencontre. Les résultats auxquels m'a conduit l'examen des phénomènes de la double réfraction dans l'arragonite, sont parfaitement d'accord sur ce point avec l'opinion de ce célèbre minéralogiste; mais comme l'axe de la forme primitive qu'il assigne à l'arragonite ne coincide pas avec l'axe de réfraction que j'ai reconnu, je crois devoir entrer dans quelques détails sur les principes qui m'ont guidé, et sur la

marche que j'ai suivie dans l'observation de ces phénomènes.

[57] 1°. Lorsqu'on a taillé deux faces parallèles dans un cristal doué de la double réfraction, et qu'un rayon incident perpendiculaire à l'une d'elles est divisé en deux rayons émergens, on doit en conclure que l'axe de réfraction est incliné sur les faces réfringentes.

2°. Lorsque le rayon n'est pas divisé, c'est une preuve que l'axe de réfraction est parallèle ou perpendiculaire à ces deux faces.

3°. Si, dans ce dernier cas, on taille dans le cristal deux nouvelles faces, et si elles ne brisent pas le rayon incident qui leur est perpendiculaire, ces quatre faces sont nécessairement parallèles à l'axe de réfraction, et leurs intersections indiquent la direction de cet axe.

4°. Lorsque sur un prisme de cristal on observe la réfraction extraordinaire dans un plan perpendiculaire aux deux faces réfringentes, et lorsqu'on trouve un rapport constant entre les sinus d'incidence et ceux de réfraction, on est assuré que ces deux faces sont parallèles à l'axe de réfraction, et leur commune intersection donne la direction de cet axe.

J'ai taillé un cristal d'arragonite (*fig.* 23), suivant une face *ab* parallèle à la face *lm*. En regardant ensuite à travers le cristal, et perpendiculairement aux deux faces, une aiguille très-mince, je me suis assuré que son image n'étoit pas doublée; mais lorsque j'inclinois le rayon visuel sur la perpendiculaire, l'extrémité

de l'aiguille commençoit à se diviser, et l'écartement des deux images étoit égal pour des angles d'incidence égaux à droite ou à gauche de la perpendiculaire. L'axe de réfraction est donc parallèle ou perpendiculaire à la face du prisme d'arragonite, et par conséquent il ne se confond pas avec celui de l'octaèdre proposé pour forme primitive, puisque l'axe de cette forme fait un angle de 32 degrés avec la face réfringente lm.

J'ai taillé ensuite le même cristal sur une nouvelle face cd parallèle à la face lx du prisme, et j'ai encore observé que le rayon perpendiculaire aux faces cd, lx n'étoit pas divisé par la double réfraction. L'axe de réfraction est donc parallèle ou perpendiculaire aux faces cd, lx; mais comme il ne peut pas être à la fois perpendiculaire aux faces lm, lx, il s'ensuit qu'il leur est parallèle, et que l'arête l comprise entre ces faces indique la direction de cet axe.

Pour m'assurer de la manière la plus positive que l'axe de réfraction de l'arragonite est parallèle aux arêtes du prisme, j'ai répété les observations que je viens de rapporter dans douze sens différens et dans des sections prises au hasard dans l'intérieur du prisme parallèlement à ses arêtes.

Enfin, pour que ce résultat fût incontestable, j'ai taillé un prisme d'arragonite (*fig.* 24) suivant deux faces ef, gh parallèle à l'axe EE' de l'octaèdre, et formant avec les arêtes du prisme un angle de 45 degrés, et j'ai reconnu qu'en plaçant une aiguille très-mince derrière le cristal et parallèlement à l'axe EE', son

image étoit doublée et l'écartement à peu près égal à celui qu'on observoit dans un rhomboïde de spath calcaire de même épaisseur, en plaçant l'aiguille parallèlement à la grande diagonale d'une des faces. Donc l'axe de réfraction de l'arragonite se trouvoit ici à peu près dans la même circonstance que l'axe de réfraction du spath calcaire dans le rhomboïde; ce qui est une nouvelle preuve que la direction des arêtes du prisme d'arragonite coincide exactement avec la direction de l'axe de réfraction.

Ces expériences ayant suffi pour me démontrer que la position de l'axe EE' de l'octaèdre regardé comme forme primitive, n'avoit aucun rapport avec les phénomènes de la double réfraction, j'ai taillé un prisme d'arragonite suivant deux faces parallèles à l'arête, mais inclinées l'une à l'autre.

L'angle compris entre les faces du prisme a été mesuré avec le cercle répétiteur, comme je l'ai exposé plus haut [2].

L'angle g, compris entre le premier signal et son image vue par réflexion, s'est trouvé

$$g = 30^\circ\ 6'\ 22''$$

L'angle h, compris entre le second signal et son image vue par réflexion,

$$h = 35^\circ\ 59'\ 10''$$

et enfin l'angle d compris entre les deux signaux,

$$d = 61^\circ\ 38'\ 48''$$

On en conclue l'angle c compris entre les faces du prisme,

$$c = d - \frac{g+h}{2} = 28^\circ\ 36'\ 2''$$

J'ai ensuite observé les angles v et v' compris entre un des signaux et ses images produites par la réfraction ordinaire et par la réfraction extraordinaire ; ce qui a donné

$$v = 20^\circ\ 50'\ 34''; \quad v' = 15^\circ\ 57'\ 20''$$

d'où on conclue les deux nombres ll', qui représentent les rapports du sinus d'incidence aux sinus de réfraction,

$$l = \frac{\sin.\ \frac{c+v}{2}}{\sin.\ \frac{c}{2}} = \frac{\sin.\ 24^\circ\ 43'\ 18''}{\sin.\ 14^\circ\ 18'\ 1''} = 1.693135$$

$$l' = \frac{\sin.\ \frac{c+v'}{2}}{\sin.\ \frac{c}{2}} = \frac{\sin.\ 22^\circ\ 16'\ 41''}{\sin.\ 14^\circ\ 18'\ 1''} = 1.534802$$

J'ai répété les mêmes opérations sur un second prisme, et j'ai trouvé

$$g = 36^\circ\ 58'\ 50''; \quad h = 17^\circ\ 54'\ 0''; \quad d = 53^\circ\ 2'\ 30''$$

D'où on conclue l'angle réfringent du prisme

$$c = d - \frac{g+h}{2} = 25^\circ\ 36'\ 5''$$

Quant aux angles v, v', un grand nombre de cassures vitreuses qui traversoient le cristal m'ont empêché de

distinguer les images avec la lunette du cercle, et j'ai dû enlever les verres pour faire l'observation à la vue simple; j'ai trouvé

$$v = 18^\circ\ 12'\ 0''; \quad v' = 13^\circ\ 54'\ 20''$$

d'où on conclue

$$l = \frac{\sin.\ \frac{c+v}{2}}{\sin.\ \frac{c}{2}} = \frac{\sin.\ 21^\circ\ 57'\ 2''\ \frac{1}{2}}{\sin.\ 12^\circ\ 48'\ 2''\ \frac{1}{2}} = 1.683510$$

$$l' = \frac{\sin.\ \frac{c+v'}{2}}{\sin.\ \frac{c}{2}} = \frac{\sin.\ 19^\circ\ 45'\ 12''\ \frac{1}{2}}{\sin.\ 12^\circ\ 48'\ 2''\ \frac{1}{2}} = 1.525425$$

Ce dernier mode d'observations n'étant pas aussi exact que le précédent, je m'arrêtai aux premières valeurs de l et l'.

Ainsi je représenterai par le nombre $l = 1.693135$ la vitesse de la lumière dans le rayon réfracté ordinaire, celle de la lumière dans l'air étant prise pour unité. On en conclue le rapport b du sinus de réfraction au sinus d'incidence,

$$b = \frac{1}{l} = 0.5906204$$

et la quantité k^2, dont le carré de la vitesse de la lumière est augmenté par l'action de la force répulsive,

$$k^2 = l^2 - 1 = \frac{1 - b^2}{b^2} = 1.866706$$

Nous prendrons aussi le nombre $l' = 1.534802$ donné

par le premier cristal, pour la moindre vitesse de la lumière réfractée extraordinairement. Ainsi la vitesse de la lumière réfractée extraordinairement sera toujours comprise entre les nombres 1.693135 et 1.534802, et la plus grande différence entre la vitesse du rayon ordinaire et celle du rayon extraordinaire sera 0.158333, celle de la lumière dans l'air étant prise pour unité.

On peut déduire de la valeur de l' le nombre $a = \frac{1}{l'}$,

$$a = \frac{1}{l'} = 0.651550$$

et la quantité k'^2 dont le carré de la vitesse de la lumière est diminuée par l'action des forces répulsives, lorsque le rayon réfracté est perpendiculaire à l'axe du cristal,

$$k'^2 = l^2 - l'^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0.511088$$

On aura donc en général pour l'expression du carré u^2 de la vitesse de la lumière réfractée extraordinairement par l'arragonite,

$$u^2 = 1 + k^2 - k'^2 . sin^2 . \mu = 2.866706 - 0.511088 . sin^2 . \mu$$

μ étant l'angle que le rayon extraordinaire fait avec l'axe du cristal.

Enfin on aura dans tous les cas les directions du rayon extraordinaire réfracté par les faces naturelles ou artificielles, en substituant dans les expressions générales (7) (8) du paragraphe [22] les valeurs de a et de b que nous venons de déterminer.

La densité de l'arragonite étant 2.94686, on aura le pouvoir réfringent ou la force réfractive absolue E, divisant k^2 par ce nombre :

$$E = \frac{k^2}{2.94686} = \frac{1.866706}{2.946860} = 0.6334560$$

et la force répulsive E' sera

$$E' = \frac{k'^2}{2.94686} = \frac{0.511088}{2.94686.} = 0.1734348$$

Nous avons trouvé pour le spath d'Islande

$$E = 0.6398806; \quad E' = 0.197675$$

Ainsi la force réfractive E que nous trouvons pour l'arragonite, ne diffère que d'un centième de celle du spath d'Islande; tandis que la force répulsive diffère d'environ un huitième $\frac{1}{8\frac{1}{2}}$.

Si on employoit pour la pesanteur spécifique de l'arragonite le nombre 2.9267 donné par MM. Thénard et Biot, on auroit

$$E = 0.6378194; \quad E' = 0.174629$$

la différence des forces réfractives du spath d'Islande et de l'arragonite ne seroit plus que d'environ $\frac{1}{520}$, tandis que celle des forces répulsives seroit d'environ $\frac{1}{89}$. Si on compare le nombre $E = 0.6378194$ de l'arragonite avec le nombre $E = 0.63330$ que MM. Thénard et Biot attribuent au spath d'Islande, la différence n'est plus que de $\frac{1}{1350}$ environ.

On peut donc regarder les différences trouvées entre les forces réfractives du spath d'Islande et de l'arragonite, comme renfermée dans la limite des erreurs de l'observation; et l'identité de leurs principes constituans étant constatée par l'analyse chimique, on peut soupçonner que les forces réfractives sont égales. Cependant il est bon de remarquer que toutes les observations donnent pour la force réfractive de l'arragonite un nombre un peu plus foible.

Quant aux forces répulsives, leurs différences sortent évidemment des limites des erreurs d'observations; et il est certain que celle du spath d'Islande surpasse de plus de $\frac{1}{9}$ celle de l'arragonite, et comme ces forces dépendent des formes des molécules intégrantes, c'est une nouvelle preuve que les molécules intégrantes de ces deux cristaux sont absolument différentes et irréductibles à une même forme.

[58] La baryte sulfatée (*spath pesant*, *schwer spath*) est divisible en prismes droits rhomboïdaux dont les faces, d'après la description de M. Haüy, sont inclinées de $101° \frac{1}{2}$, $78 \frac{1}{2}$.

J'ai cherché l'axe de réfraction de ce cristal par les moyens que j'ai employés pour l'arragonite. Cet axe est parallèle à la petite diagonale de la base; il est parallèle à l'axe de l'octaèdre secondaire représenté par le signe $\overset{2}{M}\dot{A}$. J'ai taillé un prisme dont les faces étoient parallèles à cette ligne, et j'ai déterminé, au moyen du

goniomètre, répétiteur, l'angle des faces et les deux élémens de la double réfraction.

L'angle c compris entre les faces du prisme s'est trouvé

$$c = 37^\circ\ 57'\ 42''$$

J'ai obtenu ensuite

$$l = \frac{\sin.\ 32^\circ\ 23'\ 14''}{\sin.\ 18^\circ\ 38'\ 51''} = 1.646842$$

$$l' = \frac{\sin.\ 32^\circ\ 7'\ 54''}{\sin.\ 18^\circ\ 58'\ 51''} = 1.635242$$

d'où on conclut

$$a = \frac{1}{l} = 0.6115301; \quad b = \frac{1}{l} = 0.6072226$$

$$k^2 = l^2 - 1 = 1.712090; \quad k'^2 = l^2 - l'^2 = 0.038073$$

On aura donc pour expression de la vitesse u de la lumière dans le rayon réfracté extraordinairement,

$$u^2 = 1 + k^2 - k'^2 . \sin^2 . \mu = 2.712090 - 0.038073 . \sin^2 . \mu$$

μ étant l'angle que le rayon extraordinaire fait avec l'axe du cristal.

La pesanteur spécifique du cristal employé dans les expériences étant 4.481407, la force réfractive absolue E est

$$E = \frac{k^2}{4.481407} = 0.382043$$

et la force répulsive absolue E',

$$E' = \frac{k'^2}{4.481407} = 0.00849577$$

[59] Nous avons vu [15] comment les formes secondaires rhomboïdales pouvoient se déduire les unes des autres. En nommant p le cosinus de l'angle compris entre les faces d'un rhomboïde, q le cosinus de l'angle compris entre ses arêtes, nous avons obtenu pour les valeurs correspondantes p', q', dans le rhomboïde suivant $p' = \frac{3p-1}{2(1-p)}$; $q' = \frac{1-2q}{3-2q}$ et en général

$$_{n+1}p = \frac{3\,{}_np - 1}{2\,(1 - {}_np)}\,;\quad {}_{n+1}q = \frac{1 - 2\,{}_nq}{3 - 2\,{}_nq}$$

équation dont les intégrales sont

$$_np = \frac{1+p-(1-2p)\,4^n}{2\,(1+p)+(1-2p)\,4^n}\,;\quad {}_nq = \frac{1+2q-(1-q)\,4^n}{1+2q+(1-q)\,4^n}. \qquad (f)$$

Lorsque n est positif, ${}_np$ appartient à la $n^{\text{ème}}$ dérivée de p; lorsqu'il est négatif, ${}_np$ appartient à la forme dont p est la $n^{\text{ème}}$ dérivée, c'est-à-dire à sa $n^{\text{ème}}$ dérivante. On a ainsi directement la relation qui existe entre des formes séparées par un nombre quelconque n de formes intermédiaires.

Si on élimine $4^{\pm n}$ entre les équations (f), on obtient la relation

$$\left.\begin{aligned} 4^n &= \left(\frac{1-2\,{}_np}{1-2p}\right).\left(\frac{1+p}{1+{}_np}\right) = \left(\frac{1-2p}{1-2\,{}_{-n}p}\right).\left(\frac{1+{}_{-n}p}{1+p}\right) \\ &= \left(\frac{1-{}_nq}{1-q}\right).\left(\frac{1+2q}{1+2\,{}_nq}\right) = \left(\frac{1-q}{1-{}_{-n}q}\right).\left(\frac{1+2\,{}_{-n}q}{1+2q}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

Si, dans les équations (f), on fait $n = -s$, s étant un très-grand nombre, on aura

$$_{-s}p = \frac{1}{2+\sigma}\,;\quad {}_{-s}q = \frac{1}{1+\sigma}.$$

σ étant une très-petite quantité égale à $\frac{3(1-2p)4^{-s}}{1+p-(1-2p)4^{-s}}$.
On voit donc que dans le rhomboïde correspondant à $n = -s, -sq$ qui est le cosinus de l'angle compris entre les arêtes, sera un nombre peu différent de l'unité; en sorte que cet angle sera très-petit. Ainsi ce rhomboïde aura la forme d'une aiguille rhomboïdale, et cette aiguille sera d'autant plus aigüe que s sera plus grand; mais sa forme dépendra toujours d'un certain module p qui appartiendra à un terme quelconque de la série.

Appliquons, par exemple, ce calcul à la série de rhomboïdes dans laquelle la forme cubique est comprise. Les faces du cube étant rectangulaires, le cosinus de l'angle qu'elles comprennent sera nul, et on aura $p = 0$. Cette valeur peut être prise pour module de cette série de rhomboïdes; en sorte que l'expression générale de ${}_np$ deviendra

$$ {}_np = \frac{1-4^n}{2+4^n} $$

Or on pourra reconnoître de suite si un rhomboïde correspondant à un nombre donné P, est compris dans cette série; car il faudra que dans l'équation

$$ 4^n = \frac{1-2P}{1+P} $$

le second membre soit une puissance entière positive ou négative de 4. Dans le cas contraire, le rhomboïde et le cube appartiennent nécessairement à deux séries différentes.

On peut voir avec quelle rapidité décroissent les angles compris entre les arêtes; car, pour la dixième dérivante du cube, le cosinus de cet angle est déjà $-_{10}q = \frac{1048575}{1048578}$, et l'angle correspondant est au-dessous de 8′ 20″. A la centième dérivante, le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime ce cosinus, ne diffèrent que par le 61ᵉ chiffre.

Si dans l'équation (*g*) du paragraphe précédent on fait $p = 0$, $q = 0$, elle devient

$$\frac{1 - 2\,{}_np}{1 + {}_np} = \frac{1 - {}_nq}{1 + 2\,{}_nq} = \frac{1 + {}_{-n}p}{1 - 2\,{}_{-n}p} = \frac{1 + 2\,{}_{-n}q}{1 - {}_{-n}q}$$

d'où l'on tire

$$-{}_np = {}_{-n}q\,; \quad -{}_nq = {}_{-n}p$$

en sorte que l'angle compris entre les arêtes de la $n^{ème}$ dérivante est le supplément de l'angle compris entre les faces de la $n^{ème}$ dérivée. Les faces de l'une sont réciproquement perpendiculaires aux arêtes de l'autre; en sorte que ces formes sont supplémentaires l'une de l'autre.

Les aiguilles rhomboïdales dont les dérivées conduisent à la forme cubique, ont pour expression du cosinus de l'angle compris entre leurs faces

$$-{}_sp = \frac{1 - 4^{-s}}{2 + 4^{-s}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{4^{-s}}{2 + 4^{-s}}$$

s étant un grand nombre.

Concevons actuellement un système de ces aiguilles assujéties à affecter dans leur réunion la forme rhomboïdale, et rangées, d'après la loi que nous avons exposée, de manière à former un cube; il se trouvera dans l'état le plus stable d'équilibre, parce que c'est sous cette forme qu'il renfermera le plus grand volume sous la moindre surface.

[60] Si on représente par L la longueur de l'arrête d'un rhomboïde, et si on continue à nommer p le cosinus de l'angle compris entre les faces, et si on désigne par π le rapport de la circonférence au diamètre,

La surface du rhomboïde . . . . . $= 6\,L^2 . \frac{(1-2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)}$

Son volume . . . . . $= L^3 . \frac{(1-2p).(1+p)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{3}{2}}}$

Le rayon de la sphère inscrite . . . . . $= \frac{L}{2} . \frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}.(1-2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}}$

Le volume de cette sphère . . . . . $= \frac{\pi}{6} L^3 . \frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}.(1-2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}}$

Le rapport du vol. de la sphère à celui du rhomb. $= \frac{\pi}{6} . (1+p)(1-2p)^{\frac{1}{2}}$

Le rapport du volume du rhomb. à sa surface $= \frac{L}{6} . \frac{(1-2p)^{\frac{1}{2}}.(1+p)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}}$

On voit par cette dernière équation que le volume de la sphère inscrite est égal à 36. π multiplié par le cube du rapport du volume du rhomboïde à sa surface. Ainsi dans des rhomboïdes de volume égaux, celui de la sphère inscrite est en raison inverse du cube de la surfaee de chaque rhomboïde, et par conséquent, dans une série particulière de rhomboïdes, celui dont la surface est

un *minimum* par rapport à la masse, est aussi celui qui peut contenir la plus grande sphère.

Si on cherche dans toutes les formes rhomboïdales celle pour laquelle le rapport du volume de la sphère inscrite au volume du rhomboïde est un *maximum*, on a

$$\frac{d.\,(1+p).\,(1-2p)^{\frac{1}{2}}}{dp} = 0$$

d'où on tire $p = 0$, résultat qui appartient à la forme cubique. On obtiendroit encore $p = 0$ en cherchant, dans la série de rhomboïdes de volumes égaux, celui dont la surface est un *minimum*.

Si on se propose de déterminer la série de rhomboïdes pour laquelle le rapport du volume à la surface est le même dans deux rhomboïdes consécutifs de volume égal, on aura

$$(1+p).\,(1+2p)^{\frac{1}{2}} = (1+{}_1p).\,(1-2{}_1p)^{\frac{1}{2}}$$

Mais comme on a d'ailleurs en général

$${}_1p = \frac{3p-1}{2\,(1-p)}$$

on conclut

$$p = \frac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}}\;;\quad {}_1p = \sqrt[5]{2}-\tfrac{3}{2}$$

$$angle.\ cos.\ {}_1p = 103^{\circ}\ 53'\ 30''$$

Si, au lieu de supposer le volume des deux rhomboïdes égaux, on suppose seulement leurs arêtes L égales, et si on cherche dans cette supposition la série

de rhomboïdes pour laquelle le rapport du volume à la surface sera le même dans deux rhomboïdes consécutifs, on a

$$\frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1+{}_{,}p)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-2\,{}_{,}p)^{\frac{1}{2}}}{(1-{}_{,}p)^{\frac{1}{2}}}$$

et en joignant à cette équation la relation ${}_{,}p = \frac{3p-1}{2(1-p)}$, on en tire

$$10\,p^3 + 3\,p^2 - 6\,p + 1 = 0$$

équation dont les trois racines sont $p = \frac{1}{2}$, $p = -1$, $p = \frac{1}{5}$. La première appartient à la limite des aiguilles rhomboïdales dans lesquelles les arêtes se confondent avec l'axe; la seconde, à l'autre limite des formes rhomboïdales dans laquelle l'axe est nul et tous les plans réunis en un seul; enfin la troisième racine donne ${}_{,}p = -\frac{1}{4}$, module qui appartient à la chaux carbonatée, d'après les mesures que lui assigne M. Haüy. ${}_{,}p = -\frac{1}{4}$ donne

angle. cos. ${}_{,}p = 104°\ 28'\ 39''$. *comp.* $75°\ 31'\ 21''$

l'observation nous a donné, au lieu de cet angle, celui de $74°\ 55'$; en sorte que si la forme réelle du spath d'Islande ne jouit pas exactement de la propriété proposée, elle est au moins, de toutes les formes connues, celle qui en approche davantage.

On seroit parvenu aux mêmes résultats en cherchant la série de rhomboïdes pour laquelle les angles compris entre les arêtes et les faces sont égaux et de signe con-

traire dans deux rhomboïdes consécutifs. Nous avons vu en effet que le cosinus de cet angle $= \frac{p\sqrt{2}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}}$, et on exprimera la condition proposée par

$$\frac{p}{(1-p)^{\frac{1}{2}}} = \frac{{}_1p}{(1-{}_1p)^{\frac{1}{2}}}$$

équation qui, jointe à ${}_1p = \frac{3p-1}{2(1-p)}$, donnera encore

$$10\,p^3 + 3\,p^2 - 6\,p + 1 = 0$$

[61] On peut concevoir de plusieurs manières la génération des formes successives de rhomboïdes que j'ai considérées. Si, par exemple, dans la chaux carbonatée on prend le rhomboïde équiaxe pour forme primitive, et si on conçoit un décroissement par une rangée sur les angles latéraux, on engendre le rhomboïde ordinaire du spath d'Islande. Si on considère à son tour celui-ci comme forme primitive, et si on conçoit un décroissement semblable, on obtient le rhomboïde *inverse*; celui-ci produit de la même manière le rhomboïde contrastant; enfin on peut concevoir suivant cette loi, et à l'infini, la génération des rhomboïdes successifs, dont la variété prismatique sera la limite. Dans cette hypothèse $n = 0$ correspond dans les équations (f) [59] à la forme équiaxe; on a alors pour le rhomboïde ordinaire $n = -1$; pour l'inverse, $n = -2$, et pour le contrastant, $n = -3$, et les équations proposées donnent directement les angles appartenant à ces différentes formes.

Si on considère le contrastant comme forme primi-

tive, et si on conçoit un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs, on obtient le rhomboïde inverse; si on fait la même opération sur celui-ci, on a le rhomboïde ordinaire : enfin celui-ci conduit de la même manière au rhomboïde équiaxe, et ainsi de suite à l'infini, la variété basée étant là limite. Dans cette seconde hypothèse $n = 0$ correspond, dans les équations (f), à la forme du contrastant : on a pour l'inverse $n = 1$; pour le rhomboïde ordinaire, $n = 2$, et pour l'équiaxe, $n = 3$.

Enfin, si on considère le rhomboïde ordinaire du spath d'Islande comme forme primitive, ce qui est généralement adopté, on a pour cette forme $n = 0$; pour l'équiaxe, $n = 1$; pour l'inverse, $n = -1$, et pour le contrastant, $n = -2$.

Outre ces deux manières de considérer les rhomboïdes comme dérivant les uns des autres suivant une même loi, en les prenant tous alternativement pour élémens du décroissement, il y a un troisième point de vue dans lequel on peut les regarder comme des cas particuliers d'une série de rhomboïdes beaucoup plus générale. Si on considère une forme quelconque comme primitive, et si on conçoit un décroissement par un certain nombre de rangées sur l'angle supérieur ou inférieur, on obtiendra toujours un rhomboïde dont la forme dépendra du rhomboïde primitif; et comme le nombre des décroissemens en hauteur et en largeur est indéfini, on pourra toujours déterminer ceux qui correspondent aux rhomboïdes successifs que nous avons considérés.

Soit, par exemple, p le cosinus de l'angle compris entre les faces de la forme primitive, m le nombre de rangées soustraites sur l'angle supérieur ou inférieur. Lorsque cette quantité sera fractionnaire, le numérateur exprimera le nombre de rangées soustraites en largeur, et le dénominateur, le nombre de rangées soustraites en hauteur.

Cela posé, on obtiendra en général le cosinus P de l'angle compris entre les faces de la forme secondaire, par l'équation

$$P = -\frac{2m + 1 - (m^2 + 2m + 3)p}{m^2 + 2 - 2(2m + 1)p}$$

Si on ordonne cette équation par rapport aux puissances de m, on a

$$m^2.(P - p) + m.(2 - 2p - 4pP) + 2P + 1 - 8p - 2pP = 0. \quad (1)$$

Cette équation étant du second degré, indique qu'on peut obtenir de deux manières différentes une même forme comprenant entre ses faces l'angle dont le cosinus est P. Nommons m et m les deux racines de cette équation, on aura entre ces racines l'équation

$$m + m + 2mm - 4 = 0$$

qui est indépendante des valeurs de p et de P, et qui indique qu'une des racines sera toujours plus grande que l'unité, tandis que l'autre sera toujours moindre que l'unité. Soit donc $m > 1$ et $m < 1$.

Le numérateur de m étant plus grand que le dénominateur, le nombre des rangées soustraites en largeur

sera toujours plus grand que le nombre des rangées soustraites en hauteur; en sorte que les faces et les arêtes de la forme secondaire correspondront aux faces et aux arêtes de la forme primitive, c'est-à-dire que le plan passant par l'axe et les arêtes de la forme primitive, passera aussi par l'axe et les arêtes correspondantes de la forme secondaire.

Quant à $m < 1$, le nombre des rangées soustraites en largeur étant toujours moindre que le nombre des rangées soustraites en hauteur, on obtiendra une forme semblable à la première, mais dans laquelle les faces et les arêtes correspondront aux arêtes et aux faces de la forme primitive, c'est-à-dire que le plan passant par l'axe et les arêtes de la forme primitive, passera par l'axe et la diagonale des faces de la forme secondaire.

Lorsque les valeurs de m et de m, tirées de l'équation (1), sont négatives, elles indiquent que les décroissemens se font sur l'angle inférieur. Cette équation renferme donc tout ce qui est relatif aux quatre espèces de décroissemens qu'on désigne par décroissemens en hauteur et en largeur sur l'angle supérieur et inférieur.

Si actuellement on compare ce genre de génération à celui des rhomboïdes successifs renfermé dans l'équation

$$_nP = \frac{1 + p - (1 - 2p)\,4^n}{2\,(1 + p) + (1 - 2p)\,4^n},$$

on fera $P = {}_nP$; ce qui établira entre n et m la relation $(m - 1)^2\,4^n = (m + 2)^2$; d'où on tire

$$m = \frac{2 + 2^n}{2^n - 1}; \quad \mathrm{m} = \frac{2^n - 2}{2^n + 1} \qquad (2)$$

n représentant tous les nombres entiers pairs positifs ou négatifs dans l'expression de m, et tous les nombres entiers impairs positifs ou négatifs dans l'expression de m. D'après ces dernières équations, m et m qui pouvoient représenter tous les nombres entiers et fractionnaires positifs ou négatifs, sont limités aux valeurs qui peuvent produire des formes semblables à celles qu'on obtient par la génération successive des rhomboïdes. On voit ainsi comment on peut ramener les unes aux autres les différentes générations que j'ai examinées.

Si, par exemple, on considère le rhomboïde contrastant comme la forme primitive de la chaux carbonatée, on trouvera le décroissement qui produit l'équiaxe, en faisant $n = 3$; d'où on tire $m = \frac{2}{3}$; et comme cette quantité est positive, on en conclut que ce décroissement a lieu sur l'angle supérieur, et qu'il est de deux rangées en largeur et de trois en hauteur. Si c'est l'équiaxe qu'on regarde comme la forme primitive, on aura le décroissement qui produit le contrastant en faisant $n = -3$; ce qui donne $m = -\frac{5}{3}$. m étant négatif, on en conclut que le décroissement a lieu sur l'angle inférieur, et qu'il est de cinq rangées en largeur et de trois en hauteur.

En général, si on a deux formes A et B appartenant à une même série de rhomboïdes, et si on nomme m le décroissement de molécules A qui produit la forme B, et m' le décroissement de molécules B qui produit la forme A, on aura toujours $m + m' + 1 = 0$; en sorte qu'une des lois étant donnée, on en pourra toujours conclure facilement la seconde.

[62] On peut transporter à un système quelconque d'aiguilles rhomboïdales ce que nous avons dit de celui qui renferme la forme cubique, et on peut en conclure que dans une série quelconque de formes dérivées, celles qui approchent le plus de la forme cubique, sont celles qui conviennent le mieux à l'état d'équilibre. C'est en effet dans ces limites que se rencontrent les formes naturelles qu'on observe le plus ordinairement.

Les calculs que je viens d'exposer font voir que les rhomboïdes peuvent être regardés comme l'assemblage d'une infinité d'aiguilles rhomboïdales disposées symétriquement; mais ils ne prouvent pas que cela soit en effet le cas de la Nature. Cependant la chaux carbonatée présente dans un grand nombre de cristaux trois passages consécutifs d'un rhomboïde au rhomboïde dérivé; en sorte que ce passage d'une forme à une autre, suivant la loi proposée, est dans la classe des faits physiques prouvés par l'observation, et il est naturel de penser que la permutation indéfinie des formes n'est limitée que par des conditions d'équilibre. Il est encore à remarquer que dans les 105 variétés de forme que M. Haüy a observées dans la chaux carbonatée, la loi qui donne des faces parallèles à l'axe, est reproduite quarante-huit fois.

D'un autre côté, les forces qui produisent la double réfraction se rapportent uniquement à la position de l'axe des rhomboïdes, et par conséquent à celle de l'aiguille élémentaire; car les formes dérivées n'entrent pas dans le calcul des phénomènes, et les faces naturelles ou artificielles se comportent exactement de la même manière

quand elles sont également inclinées à l'axe ; en sorte que, relativement à ces forces dont l'existence est démontrée, il faudra toujours considérer le rhomboïde comme formé par la réunion d'un système d'aiguilles rhomboïdales.

Les raisonnemens que j'ai appliqués aux rhomboïdes peuvent s'étendre facilement aux octaèdres, et en général à toutes les formes symétriques que la nature déploie dans la formation des cristaux. Ainsi en ne préjugeant rien sur la forme élémentaire des substances cristallisées, il faut néanmoins conclure des phénomènes de la double réfraction, que ces corps se comportent dans cette circonstance comme s'ils étoient composés de l'assemblage d'une infinité d'aiguilles très-aiguës disposées suivant la loi que j'ai indiquée.

[63] Après avoir exposé les phénomènes généraux de la double réfraction, il nous reste à parler de quelques applications curieuses des propriétés des substances qui doublent les images.

Considérons d'abord la réfraction de la lumière à travers deux prismes de cristal A, B, accolés l'un à l'autre et disposés de manière que l'angle réfringent du premier réponde au sommet du second. Soit ζ l'angle réfringent de l'un et l'autre prisme : ils formeront par leur réunion un solide terminé par deux faces parallèles. Supposons que la face extérieure du premier prisme soit perpendiculaire à l'axe du cristal, et que les deux faces du second soient parallèles à cet axe. Nous avons vu [34]

que lorsque le rayon incident étoit perpendiculaire à la première face, le sinus de l'angle d'émergence ordinaire ou extraordinaire étoit $\frac{sin.\ \zeta}{b}$; or les faces accolées des deux cristaux étant parallèles, l'angle d'émergence du cristal A sera l'angle d'incidence du cristal B pris avec un signe contraire. On aura par conséquent pour ce dernier cristal

$$sin.\ \theta = -\frac{sin.\ \zeta}{b}.$$

Or l'angle d'émergence τ du rayon extraordinaire est donné par l'équation (10) du paragraphe [35],

$$sin.\ \tau = sin.\ \theta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\ \left(\frac{1}{a^2} - sin^2.\ \theta\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

qui devient, en substituant pour $sin.\ \theta$ sa valeur $-\frac{sin.\ \zeta}{b}$,

$$sin.\ \tau = \frac{-a.\ sin.\ \zeta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\ (b^2 - a^2.\ sin^2.\ \zeta)^{\frac{1}{2}}}{ab}. \quad (11)$$

Quant à l'angle d'émergence du rayon ordinaire, on l'obtiendra en changeant a en b dans l'équation (10), et en substituant pour $sin.\ \theta$ la même valeur $-\frac{sin.\ \zeta}{b}$. Or cette substitution donne $sin.\ \tau = 0$. Le rayon émergent ordinaire est donc perpendiculaire à la face d'émergence, et par conséquent l'angle c compris entre les rayons ordinaire et extraordinaire émergens du cristal B, est égal à l'angle τ donné par l'équation (11). Pour avoir la plus grande valeur possible de l'angle c, il faut faire

dans l'expression précédente $sin.\ \zeta = -b$; on obtient alors

$$sin.\ c = (1 - b^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a}.\ (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

En mettant pour a et b leurs valeurs relatives au spath d'Islande,

$$sin.\ c = 0.134382;\quad c = 7^\circ\ 43'\ 22''$$

en prenant celles relatives au cristal de roche,

$$sin.\ c = 0.008172;\quad c = 0^\circ\ 28'\ 5''$$

Il faut observer cependant que si les deux prismes étoient fortement accolés, ou s'ils étoient séparés par une matière d'un pouvoir réfringent très-fort, on pourroit obtenir une plus grande valeur de c, parce que la lumière entreroit sous l'influence du second corps avant d'avoir été réfléchie par la force attractive du premier.

L'assemblage du double prisme que nous venons de considérer forme l'espèce de micromètre que M. Rochon a adapté aux lunettes astronomiques pour la mesure des petits angles, et aux lunettes terrestres pour la mesure des distances. Ce prisme est placé dans l'intérieur de la lunette, entre l'objectif et l'oculaire, dont il peut s'approcher et s'éloigner à volonté. Il divise la lumière et produit au foyer deux images de l'objet dont l'éloignement dépend de l'angle constant c compris entre les rayons ordinaires et extraordinaires, et de la distance variable du point de divergence des deux rayons produits par le rayon incident situé dans l'axe de la lu-

nette. La position de ce point dépend de celle du micromètre; il s'approche et s'éloigne avec lui. Lorsqu'il est situé au foyer de la lunette, les deux images se confondent en une seule; lorsqu'il en est éloigné d'une certaine distance déterminée par l'échelle que porte l'instrument, on peut déduire par le calcul l'écartement apparent des deux images. Si, par exemple, l'objet observé est sphérique, et si le micromètre est placé de manière à ce que les deux images se touchent par un point de leur circonférence, on en conclura facilement la distance apparente des centres, et par conséquent l'angle sous lequel le diamètre de la sphère est observé. Si le diamètre est connu, on en conclura la distance de la sphère.

Je ne m'étendrai pas davantage sur l'emploi de ce genre de micromètre qui est susceptible d'une très-grande exactitude, et dont les différens usages sont détaillés dans les Mémoires de M. Rochon. Je me contenterai de donner ici, sur sa théorie mathématique, quelques développemens qui pourront servir à déterminer directement par le calcul des élémens qu'on ne pourroit obtenir autrement que par des tâtonnemens plus ou moins exacts.

Lorsqu'on place l'un sur l'autre deux prismes quelconques d'une matière susceptible de donner la double réfraction, on observe en général quatre images, et lorsqu'on fait tourner un de ces prismes autour du rayon visuel, comme axe, on observe que deux de ces images s'éteignent alternativement à chaque quart de révolution; on remarque aussi ordinairement qu'une des deux

images s'éteint un peu avant l'autre, ce qui est conforme à la théorie. Mais lorsque l'axe de réfraction d'un des cristaux est perpendiculaire à l'arête du prisme qu'il forme tandis que l'axe de réfraction du second cristal est parallèle à l'arête du second prisme, les deux images qui disparoissent s'éteignent en même temps; en sorte qu'à chaque quart de révolution on ne voit exactement que deux images; ce qui est encore un des résultats de la théorie.

Ainsi lorsqu'on veut obtenir simplement deux images avec un double prisme de quartz, il faut tailler l'un d'eux de manière à ce que ses faces soient parallèles à l'axe du cristal, et le second de manière à ce que son arête soit perpendiculaire à cet axe. Mais ce second prisme peut être taillé d'une infinité de manières, parce que l'axe du cristal peut faire tous les angles possibles avec les surfaces réfringentes, sans cesser d'être perpendiculaire à leur ligne d'intersection. Cependant dans ces différens cas les résultats ne sont pas les mêmes : l'angle que l'axe du cristal forme avec les faces du prisme, influe sur les principaux élémens du micromètre; c'est de lui que dépendent l'angle que forment entre eux les deux rayons émergens et la position du point de divergence.

Pour éclaircir ceci par des exemples, concevons d'abord, comme nous l'avons déjà fait, que l'axe du premier cristal soit perpendiculaire à sa face extérieure. Nous avons vu qu'alors l'angle c compris entre les deux rayons émergens du second prisme, étoit exprimé par

$$sin.\ c = \frac{-\ a.\ sin.\ \zeta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\ (b^2 - a^2.\ sin^2.\ \zeta)^{\frac{1}{2}}}{ab}.$$

Quant à la position du point de divergence, nommons d sa distance à la face d'émergence, e l'épaisseur du micromètre, et f la distance des points d'émergence du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, on aura d'abord.

$$d.\ tang.\ c = f$$

Or les rayons se séparant après avoir pénétré la moitié du micromètre, et formant ensemble un angle dont le sinus est $a.\ sin.\ c$, le rayon ordinaire étant d'ailleurs perpendiculaire à la face d'émergence, on en conclut

$$f = \frac{e}{2}.\ \frac{a.sin.c}{(1 - a^2.sin^2.c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e}{2}\ \frac{a.sin.\zeta.cos.\zeta - sin.\zeta.(b^2 - a^2.sin^2.\zeta)^{\frac{1}{2}}}{a.sin^2.\zeta + cos.\zeta.(b^2 - a^2.sin^2.\zeta)^{\frac{1}{2}}}$$

donc enfin

$$d = \frac{e}{2}.\ \frac{a.\ cos.\ c}{(1 - a^2.\ sin^2.\ c)^{\frac{1}{2}}}$$

Or, comme $a.\ cos.\ c$ est toujours moindre que $(1 - a^2.\ sin^2.\ c)^{\frac{1}{2}}$, on voit que dans ce cas la distance du point de divergence à la face d'émergence sera toujours moindre que la moitié de l'épaisseur du micromètre.

Supposons actuellement que l'axe du premier cristal soit parallèle à la face d'émergence et perpendiculaire à l'arête du prisme, le rayon ordinaire sortira de ce premier cristal en faisant un angle θ dont le sinus $= -\frac{sin.\ \zeta}{b}$, et rencontrera sous ce même angle le second

cristal qui le réfractera extraordinairement. Or, en nommant τ l'angle d'émergence du second cristal pour le rayon extraordinaire, on a

$$sin.\ \tau = sin.\ \theta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\left(\frac{1}{a^2} - sin^2.\ \theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

et si on substitue pour $sin.\ \theta$ sa valeur $-\frac{sin.\ \zeta}{b}$,

$$sin.\ \tau = \frac{-a.\ sin.\ \zeta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\ (b^2 - a^2.\ sin^2.\ \zeta)^{\frac{1}{2}}}{ab}$$

le rayon extraordinaire sortira du premier cristal, en faisant un angle dont le sinus $= -\frac{sin.\ \zeta}{a}$, et rencontrera sous ce même angle le second cristal qui le réfractera ordinairement. Or en nommant τ' l'angle d'émergence du second cristal pour le rayon ordinaire, on obtient

$$sin.\ \tau' = sin.\ \theta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\left(\frac{1}{b^2} - sin^2.\ \zeta\right)^{\frac{1}{2}}$$

et si on y substitue pour $sin.\ \theta$ sa valeur $-\frac{sin.\ \zeta}{a}$, on a

$$sin.\ \tau' = \frac{-b.\ sin.\ \zeta.\ cos.\ \zeta + sin.\ \zeta.\ (a^2 - b^2.\ sin^2.\ \zeta)^{\frac{1}{2}}}{ab}$$

L'angle c compris entre les deux rayons émergens s'obtiendra alors par l'équation

$$c = \tau + \tau'$$

Quant à la distance d du point de divergence, on a d'abord.

$$d.\ (tang.\ \tau + tang.\ \tau') = f$$

Or les rayons se séparent encore dans ce cas-ci au milieu du micromètre, et forment avec l'axe de la lunette, le premier, un angle dont le sinus est $a.\ sin.\ \tau$, et le second un angle dont le sinus est $b.\ sin.\ \tau'$; ce qui donne

$$f = \frac{e}{2}.\left[\frac{a.\ sin.\ \tau}{(1 - a^2.\ sin^2.\ \tau)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b.\ sin.\ \tau'}{(1 - b^2.\ sin^2.\ \tau')^{\frac{1}{2}}}\right]$$

en sorte que la distance d se trouve déterminée en fonction de l'épaisseur e du micromètre et des quantités connues a, b, ζ.

En combinant ce que je viens d'exposer avec ce qui a déjà été dit dans les paragraphes [34], [35], on déterminera facilement les circonstances de la réfraction dans tous les cas possibles. On peut supposer à volonté que l'un ou l'autre des prismes est placé du côté de l'objectif, et on voit que ce changement fait varier l'angle compris entre les rayons émergens. On peut concevoir aussi que le prisme dans lequel l'axe de réfraction est perpendiculaire à l'arête, soit taillé de manière à ce que le point de divergence soit situé en deçà ou au-delà du micromètre. Le calcul indique directement dans ces différens cas les circonstances qui sont propres à faire naître l'effet qu'on se propose.

[64] Lorsqu'on emploie pour former une lentille un cristal susceptible de doubler les images, on obtient toujours deux foyers, et celui qui est produit par la lumière réfractée extraordinairement, est d'autant plus distinct que l'axe de réfraction du cristal fait un plus

petit angle avec l'axe de la lentille. Nous n'examinerons ici que le cas où ces deux axes sont parallèles, parce que c'est le seul dans lequel ce genre de lentilles puisse être employé avantageusement.

Supposons donc un point lumineux situé dans l'axe de la lentille. En nommant toujours θ et θ' l'angle d'incidence et celui de réfraction extraordinaire en un point quelconque de la surface réfringente, on aura, d'après les équations générales [22],

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\theta' = {} & \frac{a^2 b^2 . sin.\,\theta}{(a^2 . sin^2 . \lambda + b^2 . cos^2 . \lambda) . (a^2 . sin^2 . \lambda + b^2 . cos^2 . \lambda - a^2 b^2 . sin^2 . \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{sin.\,\lambda . cos.\,\lambda . (a^2 - b^2)}{a^2 . sin^2 . \lambda + b^2 . cos^2 . \lambda} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

λ est ici l'angle variable que le rayon de la sphère au point d'incidence fait avec l'axe de la lentille.

Soit r le rayon de la face d'incidence, d la distance du point lumineux à cette face de la lentille, f la distance focale des rayons réfractés par cette surface. Comme les angles θ, θ', λ sont très-petits, on aura

$$sin.\,\theta = \theta = \lambda . \left(\frac{d+r}{d}\right); \quad tang.\,\theta' = \theta' = \lambda . \left(\frac{f+r}{f}\right)$$

en sorte que l'équation précédente deviendra

$$\frac{f+r}{f} = \frac{b^2 (d+r)}{(a^2\lambda^2 + b^2) . [a^2 d^2 + b^2 d^2 - a^2 b^2 \lambda^2 . (d+r)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 - b^2}{a^2\lambda^2 + b^2} . \quad (2)$$

En faisant alternativement dans cette équation $\lambda = 0$ et $\lambda =$ la moitié de l'ouverture de l'objectif, on aura deux valeurs de f dont la différence déterminera l'aber-

ration longitudinale de sphéricité pour les rayons réfractés par la première face.

Si on fait simplement $\lambda = 0$, on aura la distance focale f

$$f = -\frac{rdb^2}{d.(2b^2 - a^2 - a^2b) - a^2br} \qquad (3)$$

Nommons actuellement r' le rayon de la face d'émergence, et D la distance focale relative à cette face, on aura

$$sin.\theta = \theta = \lambda.\left(\frac{D-r'}{D}\right); \quad tang.\theta' = \theta' = \lambda.\left(\frac{f-r'}{f}\right)$$

Substituant dans l'équation (1)

$$\left.\begin{aligned}\frac{f-r'}{f} = &\frac{a^2b^2.(D-r')}{(a^2\lambda^2+b^2).[a^2\lambda^2D^2+b^2D^2-a^2b^2\lambda^2.(D-r')^2]^{\frac{1}{2}}}\\ &+\frac{(a^2-b^2)}{a^2\lambda^2+b^2}\end{aligned}\right\} (4)$$

En faisant alternativement dans cette équation $\lambda = 0$, $\lambda =$ la moitié de l'ouverture de l'objectif, et en substituant les valeurs correspondantes de f tirées de l'équation (2), on obtiendra deux valeurs de D dont la différence déterminera l'aberration de sphéricité de la lentille.

Si on fait simplement $\lambda = 0$, on aura la distance focale D,

$$D = -\frac{a^2bfr'}{f.(2b^2 - a^2 - a^2b) - b^2r'}$$

et si on substitue pour f sa valeur tirée de l'équation (3),

$$D = -\frac{a^2bdrr'}{d.(r+r').(2b^2 - a^2 - a^2b) - a^2brr'} \qquad (5)$$

équation qui donne la distance focale D de la lentille en fonction de la distance d du point lumineux et des rayons r, r' : si on fait $r = r'$ c'est-à-dire si la lentille est également convexe des deux côtés,

$$D = -\frac{a^2 b dr}{2d.(2b^2 - a^2 - a^2 b) - a^2 br}$$

Enfin si on suppose le point lumineux situé à l'infini, en sorte que les rayons arrivent parallèles,

$$D = -\frac{a^2 br}{2(2b^2 - a^2 - a^2 b)}$$

Si on fait dans cette expression $a = b$, on obtient la distance focale F relative à la réfraction ordinaire,

$$F = -\frac{br}{2(1-b)}$$

Enfin la différence entre les distances focales ordinaire et extraordinaire, sera

$$D - F = -2F.\frac{a^2 - b^2}{2b^2 - a^2 - a^2 b}$$

Si on change dans les expressions précédentes le signe de r et de r', le résultat appartiendra aux lentilles concaves.

Si on introduit dans les dernières équations les nombres relatifs à la double réfraction du spath d'Islande,

$$a = 0.6741717\,; \quad b = 0.6044871$$

on aura

$$D = -r.(88.228602)$$
$$F = -r.(0.764180)$$
$$D - F = -F.(114.4546)$$

et si on y substitue ceux qui sont relatifs à la double réfraction du cristal de roche,

$$a = 0.645813; \quad b = 0.641776$$

on aura

$$D = -r.\ (0.962824)$$
$$F = -r.\ (0.895775)$$
$$D - F = -F.\ (0.074846)$$

Nous venons de considérer le cas où la courbure de la lentille est égale de part et d'autre; mais il faut remarquer qu'en général, dans toutes les lentilles d'une même substance, le rapport de D à F sera constant, quelle que soit la forme de ces lentilles lorsque les rayons incidens sont parallèles. En effet, si on fait dans l'expression de D (5), $d = \infty$, on a

$$D = -\frac{a^2 brr'}{(r + r').(2b^2 - a^2 - a^2 b)}$$

Faisant $a = b$ dans cette équation, pour avoir la valeur F relative à la réfraction ordinaire,

$$F = -\frac{brr'}{(r + r').(1 - b)}$$

Donc

$$\frac{D}{F} = \frac{a^2.(1 - b)}{2b^2 - a^2 - a^2 b}$$

résultat indépendant des valeurs et des signes de r, r'.

[65] La connoissance des forces qui produisent la double réfraction est en quelque sorte étrangère à la loi des phénomènes, et indépendante des preuves qui éta-

blissent son caractère mathématique. Ces forces agissant à de petites distances, leur action totale entre seule dans les élémens du calcul, et les recherches peuvent se borner à déterminer les directions et les vitesses qui en résultent. Cependant, après avoir établi tout ce qui est essentiel à la théorie, il est curieux d'examiner ce qui distingue les forces qui produisent la réfraction extraordinaire, de celles qu'on observe ordinairement dans les divers phénomènes de la Nature.

Les résultats que nous exposerons se bornent aux résultats des trois propositions suivantes : 1°. deux rayons incidens parallèles produisent deux rayons réfractés parallèles; 2°. l'accroissement du carré de la vitesse de ces deux rayons est fonction de leur direction par rapport à l'axe du cristal; 3°. le rayon de la sphère d'activité des forces qui produisent la réfraction extraordinaire, est du même ordre que celui des forces qui produisent la réfraction ordinaire. Les deux premières propositions sont évidentes d'après tous les phénomènes exposés dans ce Mémoire; la dernière est une conséquence nécessaire du mouvement rectiligne du rayon extraordinaire dans l'intérieur du cristal. En effet, dans la réfraction ordinaire, on suppose le rayon de la sphère d'activité des forces attractives incomparablement plus grand que la distance des molécules entre elles, et cela est nécessaire pour que la molécule de lumière qui a pénétré à une distance sensible dans l'intérieur du corps, soit en équilibre entre les forces attractives, et poursuive son mouvement en ligne droite avec une vitesse constante. Si

le rayon d'activité des forces étoit comparable à la distance des molécules, leur résultante varieroit d'un point à l'autre dans l'intérieur du cristal, et la lumière ne pourroit jamais conserver une direction rectiligne. Or, puisque dans la réfraction extraordinaire la direction du rayon dans l'intérieur du cristal est aussi rectiligne, on doit en conclure que la sphère d'activité est du même ordre que celle de la réfraction ordinaire, et que dans les deux cas l'influence des forces s'étend en dessus et en dessous de la surface réfringente à une distance incomparablement plus grande que la distance des molécules entre elles.

Si actuellement on supposoit que les forces extraordinaires agissent de molécule à molécule en raison seulement d'une fonction des distances, il faudroit en conclure, comme dans la réfraction ordinaire, que leur résultante seroit perpendiculaire à la surface réfringente, puisque l'étendue de la sphère d'activité des forces est dans l'un et l'autre cas incomparablement plus grande que la distance des molécules entre elles. Cependant la vitesse du rayon réfracté extraordinairement est fonction de sa direction par rapport à l'axe du cristal, ce qui est incompatible avec une force perpendiculaire à la surface réfringente : ainsi la réfraction extraordinaire ne peut pas se déduire directement d'une force agissant simplement sur les molécules de la lumière en raison des masses et d'une fonction des distances, comme cela a lieu dans la réfraction ordinaire.

A la vérité toutes les forces de la Nature se réduisent

en dernière analyse à des actions de molécule à molécule dépendantes des distances; mais quand on étend cette action à des corps d'une forme déterminée, il en résulte des effets d'un autre ordre dans lesquels la résultante des forces prend une expression plus composée. Ainsi, par exemple, quand on calcule l'influence de deux corps électrisés l'un sur l'autre, on doit en premier lieu considérer l'action réciproque des molécules du fluide électrique; mais l'action totale des corps dépend de leurs formes et de la manière dont ils se présentent l'un à l'autre. La réfraction extraordinaire est un effet secondaire de cette espèce, puisqu'elle ne peut pas dépendre d'une force perpendiculaire à la surface réfringente.

La sphère d'activité des forces étant beaucoup plus étendue que la distance des molécules du cristal entre elles, et deux rayons incidens parallèles produisant deux rayons réfractés parallèles, on doit en conclure que les trajectoires courbes que décrivent ces rayons sont exactement semblables. D'un autre côté, comme la vitesse finale de la lumière est fonction de l'angle que le rayon réfracté fait avec l'axe, il s'ensuit que la vitesse variable u en un point quelconque de la trajectoire courbe, est non seulement fonction de la distance z à la surface, mais encore des directions $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ du rayon lumineux. En dernière analyse, la vitesse u variant en même temps que les quantités z. $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, on doit avoir

$$u = F.\left(z.\ \frac{dx}{dz}.\ \frac{dy}{dz}\right)$$

pour déterminer la nature de la fonction F. Observons que dans le rayon réfracté extraordinaire on a

$$u^2 = v^2 + k^2 - k'^2 . \sin^2 . \mu$$

v étant la vitesse de la lumière dans l'air, k^2 la force vive due à la réfraction ordinaire, k'^2 une autre constante, et enfin μ l'angle compris entre l'axe du cristal et la direction du rayon.

Or la force vive k^2 due à la réfraction ordinaire est indépendante des directions du rayon; elle doit être considérée dans le cours de la trajectoire comme une fonction $\varphi . (z)$ de la distance z à la surface réfringente, telle que $\varphi . (z)$ est nul à une petite distance en avant de la surface, et reçoit sa valeur complète à une petite distance en dessous. Ainsi tant qu'on considère le mouvement de la lumière dans la trajectoire courbe, on doit, dans l'expression précédente, remplacer k^2 par $\varphi . (z)$. Le terme k'^2 est aussi indépendant des directions des rayons, et est introduit par une autre fonction analogue $\pi . (z)$ de z, qui reçoit aussi sa valeur complète quand le rayon a pénétré dans le cristal à une distance sensible de la surface; en sorte que, dans la trajectoire courbe, le terme k'^2 doit être remplacé par $\pi . (z)$.

$\sin^2 . \mu$ est le seul terme de l'expression de u^2 qui dépende de la direction du rayon; sa valeur est donnée par l'équation

$$\cos . \mu = \cos . \lambda . \cos . \theta' - \sin . \lambda . \sin . \theta' . \cos . \varpi' .$$

$$= \frac{\cos . \lambda dz - \sin . \lambda dx}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}}$$

λ étant l'angle compris entre l'axe du cristal et la normale à la surface réfringente. Ce terme ne renferme aucune constante qui puisse dépendre de l'influence de z, et il est naturel qu'il n'éprouve d'autres variations dans le cours de la trajectoire que celles qui proviennent des variables θ', ϖ' ou $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ qu'il renferme. D'après ces considérations l'expression de la vitesse u en un point quelconque de cette courbe, devient

$$u^2 = v^2 + \varphi.(z) - \pi.(z).\left\{\begin{array}{c} sin^2.\,\theta'.\,sin^2.\,\varpi' \\ +\,(sin.\,\theta'.\,cos.\,\varpi'.\,cos.\,\lambda \\ +\,cos.\,\theta'.\,sin.\,\lambda)^2 \end{array}\right\}$$

ou

$$u^2 = v^2 + \varphi.(z) - \pi.(z).\frac{dy^2 + (dx.\,cos.\,\lambda + dz.\,sin.\,\lambda)^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Cette expression satisfait tous les phénomènes de la réfraction extraordinaire; elle donne ceux de la réfraction ordinaire quand on fait $\pi.(z) = 0$. On détermine la loi de la réfraction ordinaire indépendamment de la fonction des distances $\frac{d.\,\varphi\,(z)}{dz}$ qui représente l'intensité de la force. Nous déterminons de même la réfraction extraordinaire, indépendamment des deux fonctions $\frac{d.\,\varphi\,(z)}{dz}$, $\frac{d.\,\pi\,(z)}{dz}$ qui représentent l'intensité des forces en tant qu'elles dépendent des distances. Dans l'un et l'autre cas, la forme des fonctions est indéterminable, parce que la loi des phénomènes en est indépendante, et par cette même raison la détermination de cette forme

devient inutile dans les recherches qui ont pour but de lier les phénomènes par une même loi; ce qui est le seul objet des théories physiques. Cette indépendance de la forme des fonctions est un avantage attaché au genre de forces dont la sphère d'activité est très-petite, avantage que Newton et l'auteur de la *Mécanique céleste* ont déjà mis à profit pour déduire des lois générales du mouvement des phénomènes qui sembloient échapper au pouvoir de l'analyse.

L'expression de la vitesse que je viens de donner, et celle des forces qu'on peut en déduire, ne s'accordent pas seulement avec les lois de la double réfraction, mais elles se rattachent encore aux phénomènes singuliers qu'offre la lumière en passant d'un cristal dans un autre, et font voir pourquoi le rayon déjà réfracté ordinairement ou extraordinairement par le premier cristal, peut produire un seul faisceau ordinaire ou extraordinaire par l'action du second cristal.

Nous avons vu [53] que, pour représenter ces phénomènes, il falloit supposer dans le rayon lumineux qui a été soumis à la double réfraction, trois axes rectangulaires a, b, c, l'axe a étant dans la direction même du rayon. Si le plan des axes a, c est parallèle à l'axe du second cristal, le rayon est réfracté en un seul faisceau ordinaire. Si, au contraire, le plan des axes a, b est parallèle à l'axe du cristal, le rayon est réfracté en un seul faisceau extraordinaire. Lorsque ni l'un ni l'autre de ces plans n'est parallèle à l'axe du second cristal, le rayon se divise en deux faisceaux, de manière que l'axe

du cristal est perpendiculaire à l'axe b de l'un des rayons et à l'axe c de l'autre. Le faisceau dont l'axe b est perpendiculaire à celui du cristal, est réfracté ordinairement, et le rayon dont l'axe c est perpendiculaire à celui du cristal, est réfracté extraordinairement.

Or l'action de la force extraordinaire est représentée par $-k'^2 . sin^2 . \mu$, expression dans laquelle μ représente l'angle compris entre l'axe du cristal et l'axe a du rayon extraordinaire, ou le supplément de l'angle μ' compris entre l'axe b du même rayon et celui du cristal. Ainsi on pourra toujours substituer l'angle μ' à l'angle μ, et on aura alors pour l'action de la force extraordinaire $-k'^2 . cos^2 . \mu'$. Mais nous avons observé que l'axe b du rayon ordinaire est toujours perpendiculaire à celui du cristal, quelle que soit d'ailleurs la direction de ce rayon. On a donc toujours pour les molécules de ce rayon $\mu' = 90°$, $cos . \mu' = 0$; d'où on voit directement pourquoi les molécules de ce rayon échappent à l'action de la force extraordinaire. Ainsi en regardant l'action de cette force comme une fonction de l'angle μ' compris entre l'axe b du rayon et celui du cristal, on peut déduire des mêmes formules les lois de la réfraction ordinaire ou extraordinaire et les singuliers phénomènes que présentent les rayons qui ont déjà été modifiés par l'action d'un premier cristal.

CONCLUSION.

[66] Les premières observations qui aient été publiées sur la double réfraction sont celles d'Érasme Bertholin, professeur de géométrie et de médecine à Copenhague (1). Il avoit remarqué qu'en plaçant un objet sous un rhomboïde de spath d'Islande, son image étoit doublée, et que plus le cristal étoit épais, plus la distance des deux images étoit grande. Il avoit conclu de ce phénomène que chaque rayon étoit soumis à une double réfraction, dont l'une se rapportoit à la normale et l'autre à une ligne parallèle aux arêtes. Il avoit aussi observé qu'une des images paroissoit toujours plus élevée que l'autre. Dans certains cas il n'apercevoit qu'une seule image, dans d'autres il en voyoit jusqu'à six. Il attribuoit la cause de ces phénomènes à la disposition des pores à travers lesquels la lumière étoit transmise.

Huyghens, quelques années plus tard, entreprit, dans son *Traité de la lumière*, la théorie de la double réfraction (2); il examina cette matière dans tous ses détails, et parvint à la véritable loi des phénomènes. Comme il expliquoit la réfraction ordinaire par les ondulations sphériques d'un fluide éthéré, il attribua la réfraction extraordinaire à des ondulations elliptiques. Un grand

(1) *Experimenta cristalli Islandici, quibus mira et insolita refractio detegitur.* Hasniæ, 1669.

(2) *Traité de la lumière.* Leid. 1690, chap. 5. Hugenii *Opera reliqua*, Amst. 1728, t. IV.

nombre d'expériences le confirma dans son opinion, et s'il les eût rapportées avec détail, on n'auroit pas douté pendant plus d'un siècle de la vérité de sa théorie.

Il fait dans son ouvrage la remarque importante que lorsque deux rhomboïdes sont superposés et parallèles, le rayon ordinaire ou extraordinaire qui a traversé le premier, n'est plus divisé par la réfraction du second. Il avoue que cette circonstance ne s'accorde pas avec son hypothèse, et il pense qu'elle dépend de propriétés de la lumière encore inconnues.

On a vu comment la loi à laquelle il est parvenu peut être dépouillée du système des ondulations qui répugne aux notions actuelles de la physique. Cette loi considérée en elle-même et débarrassée de l'explication à laquelle Huyghens l'avoit attachée, est une des plus belles découvertes de ce célèbre géomètre.

Vingt ans après la publication du Traité d'Huyghens, Lahyre lut à l'Académie un *Mémoire sur la double réfraction* (1). La loi qu'il donne pour représenter ce phénomène n'est pas exacte : il suppose que la réfraction extraordinaire suit la même loi que la réfraction ordinaire; mais qu'au lieu de compter les sinus d'incidence et de réfraction, à partir de la normale à la surface, il faut les compter à partir d'une ligne qui fait avec cette surface un angle d'environ 74 degrés. D'après cette hypothèse il trouve que le rapport des sinus, dans la réfraction ordinaire, est $\frac{5}{3}$, et dans la réfraction extraordinaire, $\frac{15}{9}$.

(1) *Mémoires de l'Académie*, 1710.

Il est probable que Lahyre n'a pas soumis à l'analyse la loi qu'il proposoit; car, en considérant seulement la réfraction dans la section principale, le *minimum* de distance des images, d'après sa théorie, devoit se trouver sous un angle d'incidence θ compris entre o et 16° 40′, tandis que, d'après l'expérience, cette distance diminue constamment, depuis l'angle d'incidence, de 90°, jusqu'à celui de — 90°; en sorte que le *maximum* et le *minimum* sont aux deux limites opposées. D'après la loi de Lahyre, on devroit encore avoir deux *maxima*, l'un à l'angle de 90°, et l'autre à celui de — 90°. Ce qui l'a probablement induit en erreur, c'est que sous un angle d'incidence d'environ 16° 40′, le rayon extraordinaire n'est pas brisé en traversant le cristal; il continue à se mouvoir en ligne droite, comme cela a lieu pour le rayon ordinaire lorsqu'il est perpendiculaire à la surface d'incidence. Mais Huyghens avoit déjà fait cette observation, et il semble vouloir prémunir son lecteur contre les fausses conséquences qu'on pourroit déduire de ce phénomène.

Newton, dans les questions qui suivent son *Traité d'optique*, a consacré plusieurs pages à la double réfraction (1). Il connoissoit l'ouvrage d'Huyghens; cependant il substitue à la loi de ce géomètre une loi plus simple en apparence, mais absolument contraire aux phénomènes, comme M. Haüy l'a remarqué et démontré le premier. On a peine à expliquer le peu de cas que

(1) *Optice*, quest. 25 et 26. 1719.

Newton fit, dans cette circonstance, d'une loi que Huyghens avoit déclarée conforme à ses expériences; il est probable qu'il n'en répéta aucune avec le soin qu'il étoit accoutumé à mettre dans ses travaux physiques, et que, dédaignant l'hypothèse des ondulations qu'il avoit combattue et terrassée par ses théories, il enveloppa dans le même jugement et la loi et l'explication qui sembloit l'appuyer. Quoi qu'il en soit il tenta le premier d'expliquer le phénomène que Huyghens avoit remarqué, en posant l'un sur l'autre deux rhomboïdes de spath d'Islande, et il fut conduit à ce résultat singulier, qu'il falloit admettre dans les molécules lumineuses des pôles jouissant de propriétés différentes; car, dit-il, si ce qui fait la différence de la réfraction ordinaire et de la réfraction extraordinaire, n'étoit pas propre à la lumière (*congenitum*), et si elle recevoit cette modification par la réfraction seule, il faudroit qu'on observât dans les réfractions suivantes des modifications nouvelles et semblables.

Huyghens avoit déjà observé que le cristal de roche donnoit une double réfraction. Beccaria a confirmé cette remarque dans un Mémoire publié en 1761 (1). Il ne s'est pas occupé de la loi des phénomènes, et il paroît avoir cherché leur cause dans l'action de l'électricité.

Martin, dans son *Essai sur le cristal d'Islande* (2), a publié un grand nombre d'observations nouvelles sur

(1) *Philosophical transactions*, vol. LII. 1761.

(2) *Essays on Island. cristal.*

cette matière. Il a remarqué que la réfraction étoit quelquefois quadruple et sextuple, et il a multiplié les phénomènes à l'aide de plusieurs prismes qui jouissoient de cette propriété. Il a observé que dans plusieurs cas la lumière émergente étoit colorée, lors même que la réfraction avoit lieu à travers deux faces parallèles. J'ai donné dans le cours de ce Mémoire l'explication et la mesure de ces différens phénomènes.

M. Rochon (1) est le premier qui ait utilisé pour les arts les phénomènes de la double réfraction. L'application qu'il en a faite aux lunettes, pour la mesure des angles de l'astronomie et pour la mesure des distances sur terre, est un des plus curieux résultats de l'optique. Ce procédé consiste à placer dans l'intérieur d'une lunette un double prisme mobile de cristal de roche ou de spath d'Islande. Ce prisme, en séparant les rayons, double le foyer de l'objectif, et la distance des images dépend de la position qu'il occupe dans la lunette.

La perfection à laquelle M. Rochon a porté cette ingénieuse invention, et la précision dont ce micromètre est susceptible, est une nouvelle preuve que dans les sciences il n'y a rien de purement spéculatif, et que les diverses propriétés des corps finissent toujours par trouver une application utile.

M. Haüy (2), en analysant les propriétés physiques

(1) *Recueil de Mémoires sur la Mécanique et la Physique.* Paris, 1783.

(2) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1788, *Traité de Minéralogie*, t. II.

des substances cristallisées, a été naturellement conduit à examiner les phénomènes de la double réfraction. La loi de Huyghens, enveloppée dans le système des ondulations, lui a échappé comme elle avoit échappé à l'œil pénétrant de Newton ; mais comme il avoit consulté l'expérience, il a donné pour la réfraction, dans la section principale, une nouvelle loi qui a exactement les mêmes limites que celle de Huyghens, et qui la touche de si près dans les autres points, qu'on peut prévoir qu'une suite d'expériences plus nombreuses et plus variées l'auroit conduit à découvrir pour la seconde fois la véritable loi des phénomènes.

Wollaston (1), en appliquant à la mesure de la force réfractive du spath d'Islande le moyen ingénieux qu'il avoit indiqué pour mesurer celle des corps opaques, est parvenu à plusieurs résultats remarquables qui confirment que les rayons, lorsqu'ils sont réfractés parallèlement aux faces du cristal, suivent une loi de réfraction conforme à celle indiquée par Huyghens. Ce célèbre physicien ajoute que ces résultats sont trop conformes à la théorie de Huyghens pour qu'il soit permis de la négliger. Il est le premier qui, après un siècle d'oubli, ait pensé à vérifier, par quelques expériences directes, la théorie que ce grand géomètre regardoit comme incontestable, et que Newton avoit rejetée sans examen.

Enfin, dans un Mémoire (2) qui renferme plusieurs

(1) Journal de Nichelson, 1803.

(2) Journal de Gehlen, t. IV.

remarques importantes sur cette matière, Bernhardi a observé que dans tous les corps qui doublent les images, il y a un axe de réfraction auquel se rapportent les phénomènes; qu'on peut en général apercevoir la double réfraction à travers des faces parallèles; qu'elle est simple seulement dans les cas où les faces sont parallèles ou perpendiculaires à l'axe; qu'enfin, dans chaque substance, l'éloignement des images dépend de l'éloignement des faces, de leur inclinaison entre elles, de la direction du rayon visuel et de l'éloignement de l'objet lorsque les faces sont inclinées.

Lorsque l'Institut (1) a appelé l'attention des physiciens sur la question de la double réfraction que la différence d'opinion des plus grands géomètres rendoit indécise, j'ai commencé par observer et mesurer une longue série de phénomènes sur des faces naturelles et artificielles du spath d'Islande. En vérifiant ensuite sur ces observations les différentes lois proposées jusqu'à ce ce jour par les physiciens, j'ai été frappé de l'accord admirable de celle de Huyghens avec les phénomènes, et j'ai été promptement convaincu que cette loi étoit réellement celle de la Nature. En développant les formules analytiques dans lesquelles il est nécessaire de traduire cette loi pour comparer ses résultats à ceux de l'expérience, j'ai trouvé qu'elle satisfaisoit non seulement à tous les phénomènes que ce grand géomètre avoit observés, mais encore à ceux qui avoient échappé à ses

(1) Janvier 1808.

recherches, tels que les réfractions multiples et les réflexions extraordinaires.

Huyghens et Newton avoient déjà observé que la lumière qui a traversé un cristal de spath d'Islande, ne se comportoit plus comme la lumière directe. Ils avoient remarqué que, soumise à l'action d'un nouveau cristal, elle produisoit deux faisceaux d'une intensité inégale, et que, même dans diverses circonstances, elle ne se divisoit plus et produisoit un seul faisceau ordinaire ou extraordinaire. J'ai reconnu que cette modification de la lumière étoit identique, quelle que soit l'espèce des cristaux qui la produisent, et j'ai déterminé la loi des phénomènes auxquels elle donne naissance. Ces recherches m'ont conduit à la découverte de cette propriété singulière qu'ont tous les corps opaques ou diaphanes, d'imprimer à la lumière cette même modification qu'elle reçoit par l'action des cristaux qui doublent les images. Les conséquences de cette observation m'ont fait connoître un moyen de modifier la lumière de manière à ce qu'elle échappe à la réflexion partielle qu'elle éprouve ordinairement à la surface des corps diaphanes et à celle des corps opaques polis.

Pendant que je terminois ces recherches, M. Laplace a publié un théorème remarquable du principe de la moindre action qui donne, dans tous les systèmes de réfraction, les rapports qui existent nécessairement entre les vitesses et les directions de la lumière. D'après ce théorème, la loi de Huyghens, que j'avois déjà confirmée par de nombreuses observations, se trouve aussi

d'accord avec les principes généraux de la mécanique; en sorte qu'elle doit être regardée comme ayant toute la certitude et tous les caractères des lois mathématiques de la nature.

Ainsi, après un siècle de recherches et de discussions sur cette matière, une connoissance plus parfaite des phénomènes nous ramène à admettre, comme incontestable, cette loi remarquable que l'autorité de Newton a fait méconnoître, et replace une des plus belles découvertes de Huyghens au rang qu'elle doit occuper dans le système de nos connoissances.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE Ier. *Propriétés générales des faisceaux de rayons.*

[1] Des faisceaux de rayons droits, et en général des systèmes de lignes droites contiguës qui ne sont pas parallèles.

[2] Du système de lignes droites émanant de tous les points d'une surface courbe, suivant une loi analytique quelconque.

[3] Des deux systèmes de surfaces développables qui peuvent toujours remplacer ce système de lignes droites et des deux surfaces courbes qui sont le lieu des points de rencontre des droites consécutives.

[4] Des angles sous lesquels se coupent ces deux séries de surfaces développables.

[5] Des solutions particulières qui déterminent les limites des résultats précédens.

[6] Du système particulier de lignes qui rencontrent une droite appartenanant au même système général. Des points de l'espace auxquels appartiennent ces lignes. Propriété particulière de la surface qui est le lieu de ces points.

[7] Des faisceaux de rayons courbes, et en général des systèmes de courbes contiguës et variables de forme.

CHAPITRE II. *Catoptrique.*

[8] Équations des rayons de lumière émanans d'un point lumineux, et réfléchis par une surface courbe.

[9] Ces rayons réfléchis sont le lieu de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent à angle droit.

[10] De l'intensité de la lumière réfléchie modifiée par la forme de la surface réfléchissante.

[11] De la double réflexion. Propriétés des fonctions qui entrent dans l'expression des rayons doublement réfléchis.

[12] Les rayons réfléchis deux fois sont le lieu de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent sous des angles variables.

[13] De l'intensité de la lumière réfléchie modifiée par la forme des deux surfaces réfléchissantes. Des faisceaux de rayons réfléchis par un nombre quelconque de surfaces courbes. De l'intensité de la lumière dans ces différens cas.

[14] De la forme apparente des objets dont l'image est réfléchie par un nombre quelconque de surfaces courbes.

CHAPITRE III. *Dioptrique.*

[15] Équations des rayons de lumière émanant d'un point lumineux et réfractés par une surface courbe.

[16] Ces rayons réfractés sont le lieu de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent à angle droit. De l'intensité de la lumière réfractée modifiée par la forme des surfaces réfringentes.

[17] Des surfaces dont les courbes de réflexion et de réfraction se confondent.

[18] Des rayons réfractés par deux surfaces. Des rayons réfractés par un nombre quelconque de milieux. De l'intensité de la clarté et de la forme des images réfractées.

[19] Des limites dans lesquelles la réfraction se change en réflexion.

[20] Des conséquences d'où on peut déduire la force réfractive des corps diaphanes et des corps opaques.

[21] De la lumière réfractée par des corps non homogènes. Des rayons courbes.

[22] Du cas où les couches d'égale force réfractive sont planes.

[23] Du cas où elles forment une série de sphères concentriques.

[24] Considérations particulières au cas où les couches sont des surfaces quelconques, et où les forces agissent à distance finie suivant une loi donnée.

[25] Catadioptrique. Récapitulation.

DEUXIÈME PARTIE.

[1] *Exposition des phénomènes de la double réfraction.*

CHAPITRE Ier. *Expériences sur la double réfraction et la double réflexion dans le spath d'Islande.*

[2] SPATH d'Islande. Détermination de l'angle compris entre les faces du rhomboïde.

[3] [4] Moyens employés pour déterminer la force réfractive ordinaire.

[5] [6] Observations sur la réfraction extraordinaire, dans le plan de la section principale.

[7] Méthode employée pour faire ces expériences.

[8] Observations dans un plan perpendiculaire à la section principale.

[9] Observations sur une face perpendiculaire à l'axe du cristal.

[10] Observations sur des faces parallèles à l'axe du cristal.

[11] [13] Sur la réflexion extraordinaire.

CHAPITRE II. *Théorie analytique des lois de la double réfraction.*

[14] RELATION des angles compris entre les faces, les arêtes et l'axe du rhombodeïde de spath d'Islande.

[15] [16] Relation entre la forme primitive et les principales formes secondaires.

[17] [18] Des conditions générales de mécanique qui doivent être satisfaites dans toutes les hypothèses de réfraction.

[19] Application des principes précédens à la réfraction ordinaire.

[20] [21] Loi de la réfraction extraordinaire proposée par Huyghens.

[22] [23] Expression analytique de la loi de la réfraction extraordinaire. Détermination des vitesses de la lumière.

[24] [25] Détermination des deux constantes a et b, en considérant la réfraction extraordinaire sur une face naturelle du cristal.

[26] [27] Valeur des mêmes constantes déduites des observations faites sur une face perpendiculaire à l'axe du cristal.

[28] [29] Comparaisons des réfrac-

tions observées et des réfractions calculées.

[30] De la lumière rayonnante provenant d'un point situé dans l'intérieur du cristal.

[31] [32] Calcul des distances apparentes de l'image ordinaire et de l'image extraordinaire.

[33] Calcul de la réflexion extraordinaire. Comparaison avec les observations.

[34] [35] De la marche des rayons extraordinaires à travers un prisme de spath d'Islande.

[36] [40] Limites des réfractions ordinaires et extraordinaires. Des cas où ces réfractions se changent en réflexions totales.

[41] Sur des phénomènes particuliers qui sembloient faire exception aux lois de la double réfraction.

[42] Valeur absolue des constantes a et b, et des forces attractives et répulsives qui produisent la réfraction extraordinaire.

CHAPITRE III. *Des nouvelles propriétés que la lumière acquiert par l'influence des corps qui la réfractent doublement ou qui la réfléchissent.*

[43] [45] PROPRIÉTÉS de la lumière qui a été soumise à l'action d'un cristal de spath d'Islande.

[46] Intensité de la lumière réfléchie ordinairement et extraordinairement.

[47] Expériences qui constatent que la modification que la lumière éprouve de la part des différens cristaux, est identique et indépendante de leurs principes constituans.

[48] Cette modification peut être imprimée à la lumière par tous les corps opaques et diaphanes.

[49] Conséquences qu'on en déduit sur la force qui produit la réflexion partielle.

[50] Action des corps opaques.

[51] On peut, avec de simples corps diaphanes, modifier un rayon de lumière de manière à ce qu'il échappe à la réflexion partielle.

[52] Action des miroirs métalliques sur la lumière modifiée.

[53] [54] Loi de ces phénomènes.

CHAPITRE IV. *De la double réfraction dans diverses substances. Des forces qui produisent la réfraction extraordinaire.*

[55] De la double réfraction du quartz.

[56] [57] De la double réfraction de l'arragonite.

[58] De la double réfraction de la barite sulfatée.

[59] [62] Sur les formes des cristaux. Considérations générales déduites des phénomènes de la double réfraction.

[63] Des micromètres de spath d'Islande et de cristal de roche.

[64] Des objectifs de spath d'Islande et de cristal de roche.

[65] Sur les forces qui produisent la réfraction extraordinaire.

[66] Recherches antérieures sur les phénomènes de la double réfraction.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Fig. 1.

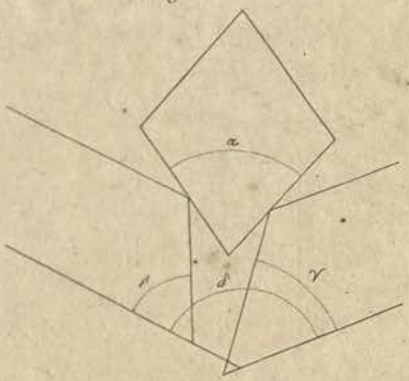


Fig. 2.

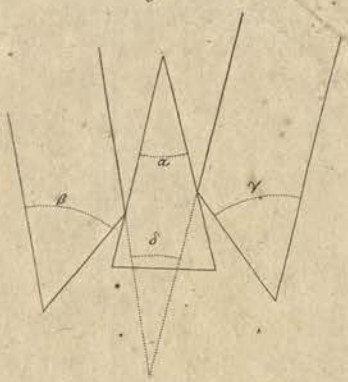


Fig. 3.

Fig. 4.

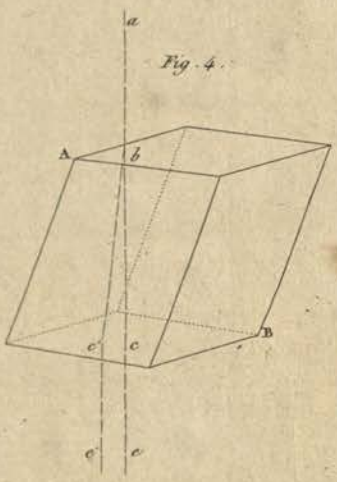


Fig. 5.

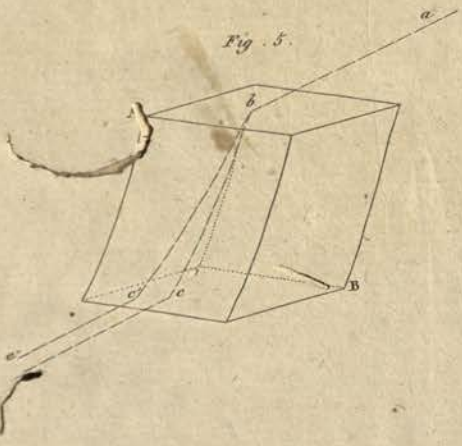


Fig. 6.

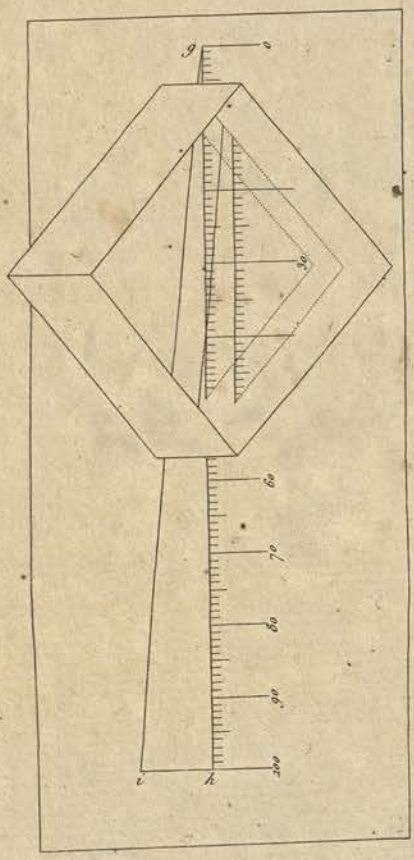


Fig. 7.

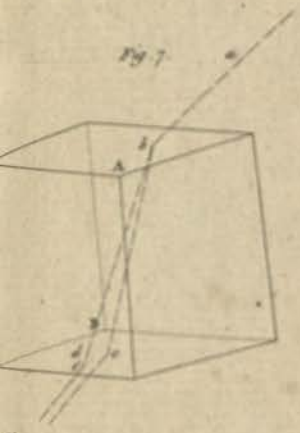


Fig. 8.

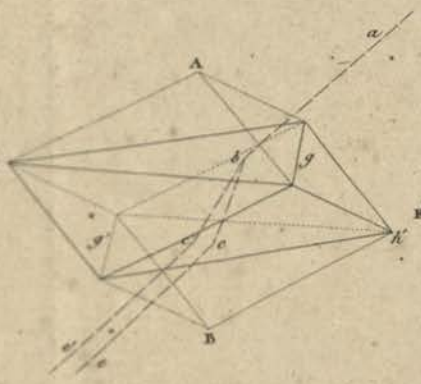


Fig. 9.

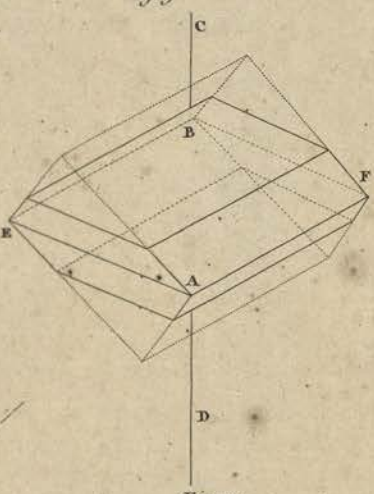


Fig. 10.

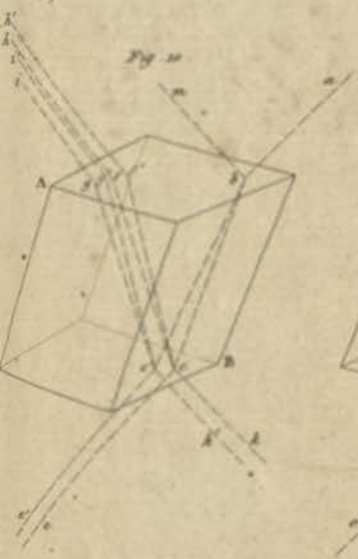


Fig. 11.

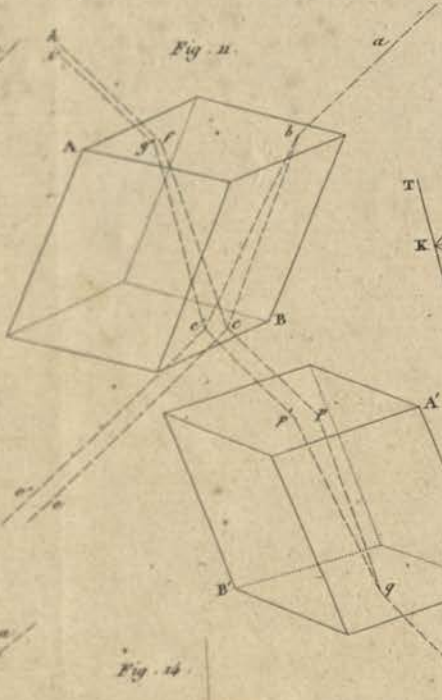


Fig. 12.

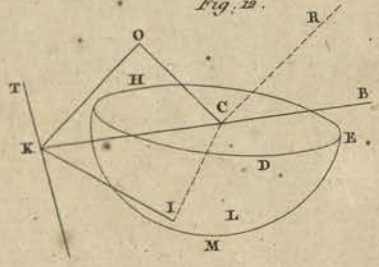


Fig. 13.

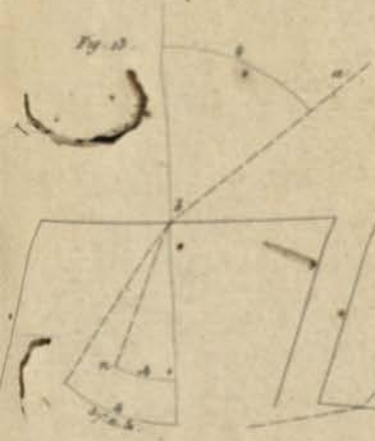


Fig. 14.

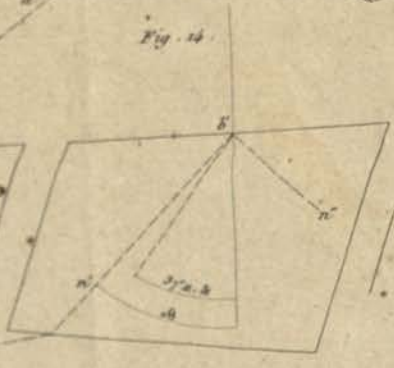


Fig. 15.

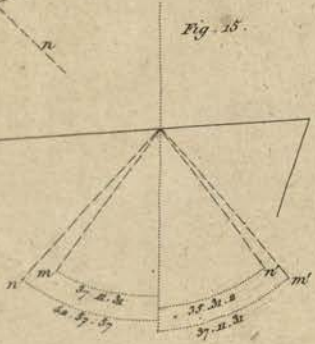


Fig. 16.

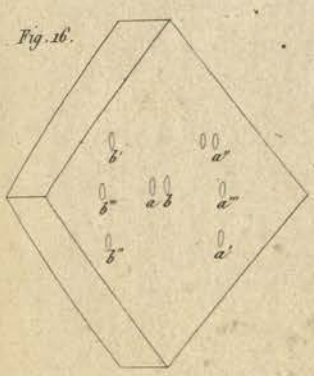


Fig. 17.

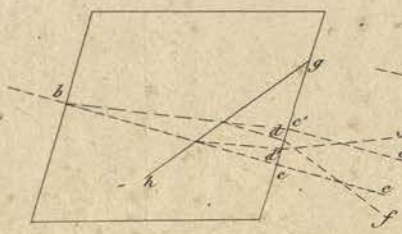


Fig. 18.

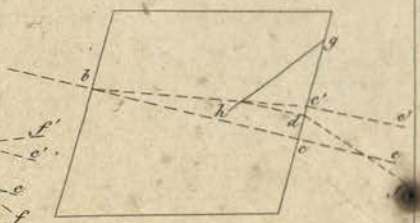


Fig. 19.

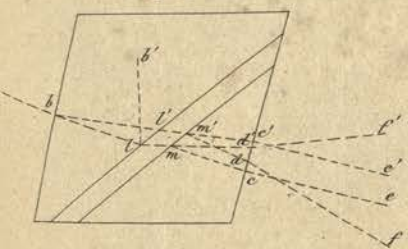


Fig. 20.

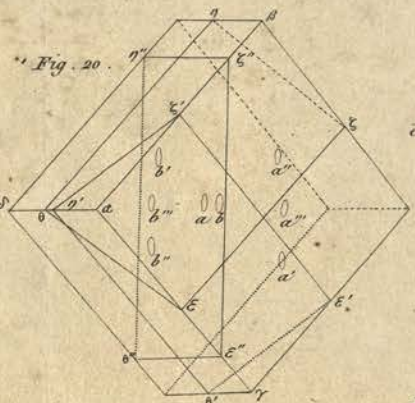


Fig. 23.

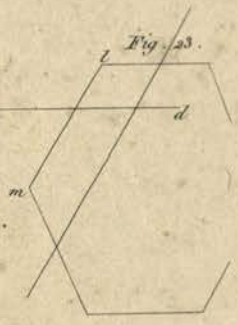


Fig. 21.

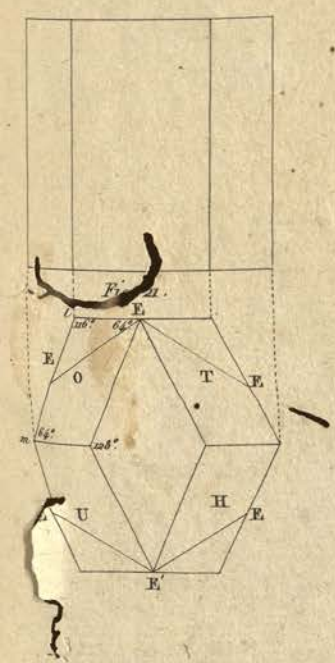


Fig. 22.

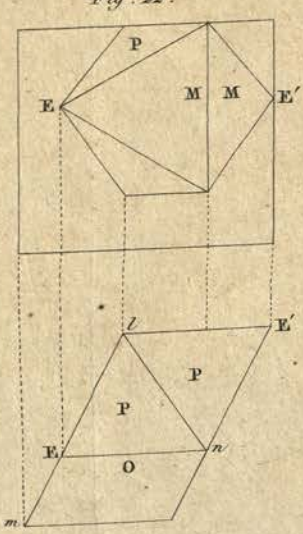
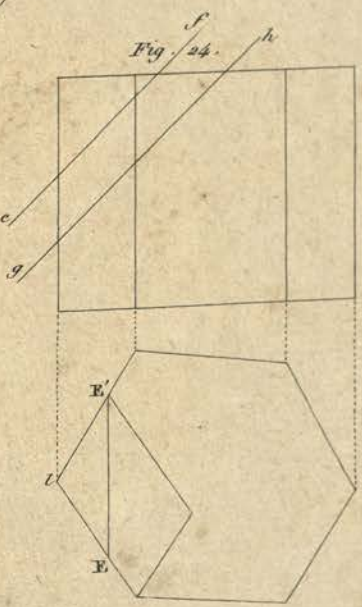


Fig. 24.



00053339

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 21 October, 2015